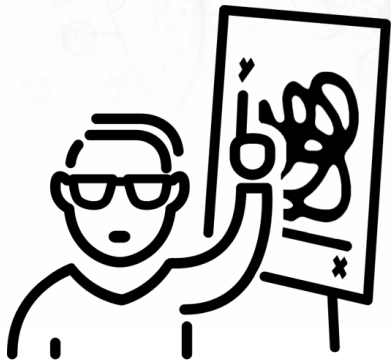


**ARTGORITMY / 04**

# **ESTETICKÉ FUNKCE**

■ Od sinu a kosinu k superrovnici



# ■ ESTETICKÉ FUNKCE

## ■ Periodické funkce

### ■ Harmonické funkce

- Lissajousovy křivky
- vírové spirály
- motýlí křivka

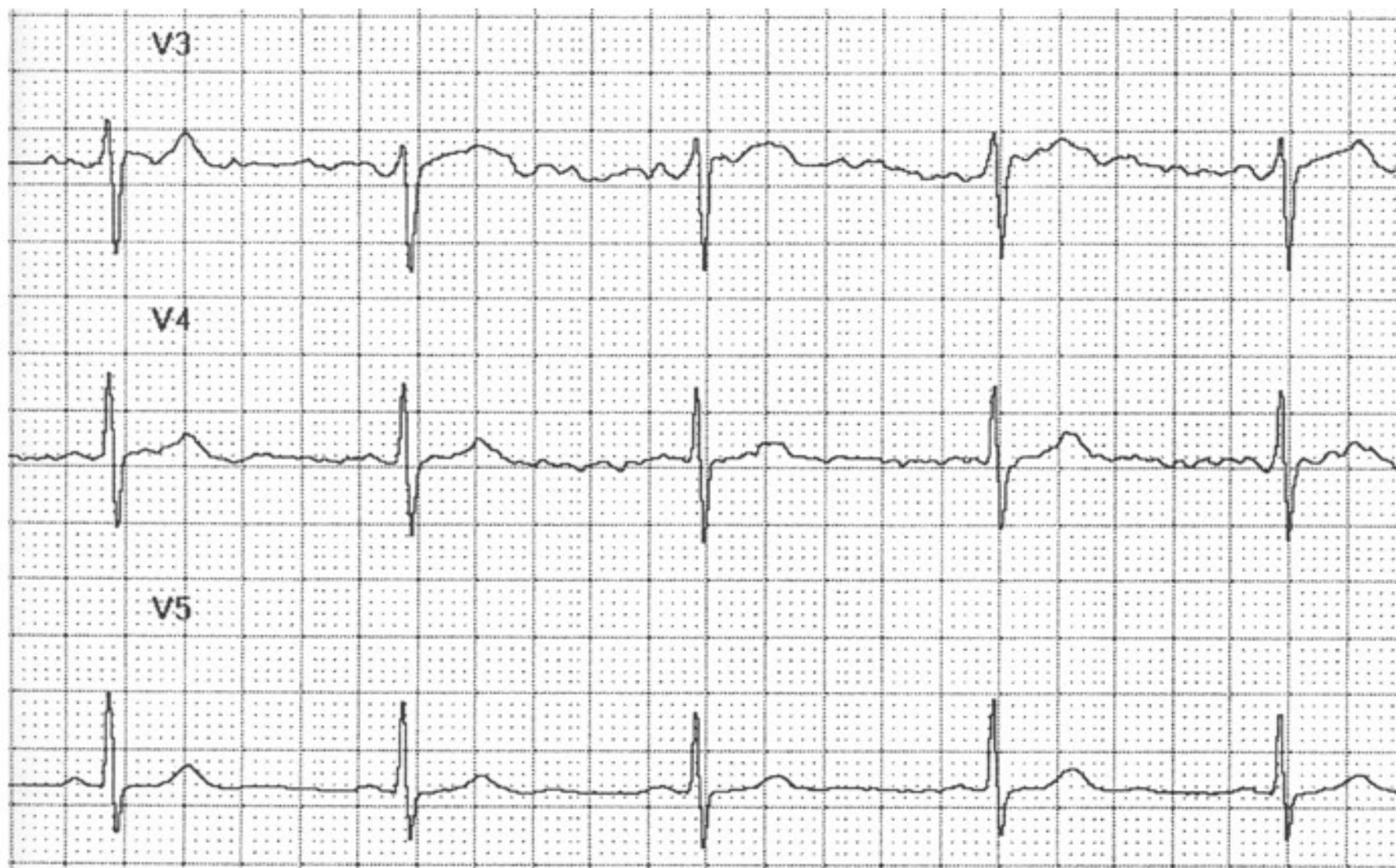
### ■ Cyklické funkce

- cykloidy
- spirografy

### ■ Superfunkce

- superelipsa
- superrovnice





## Rythmus funkcí

opakování hodnoty po určité konečné periodě,  
vztažené k nezávislé proměnné

= translační symetrie

$$\forall x, p \in E, n \in \mathbb{Z}: f(x+np) = f(x)$$

Estetiku tvoří rytmická repetice

## *Goniometrické funkce*

funkce velikosti úhlu s periodou  $2\pi$  nebo  $\pi$

užívány v astronomii, zeměměřičství, navigování...

## Dlouhá historie...

### ***Almagest***

**(*Kitáb al-magisti*, Velká kniha)**

Klaudios Ptolemaios, cca 150 n. l.

Astronomické poznatky ve třinácti svazcích,  
hodnoty sinu  $0^\circ - 90^\circ$  po 15 minutách

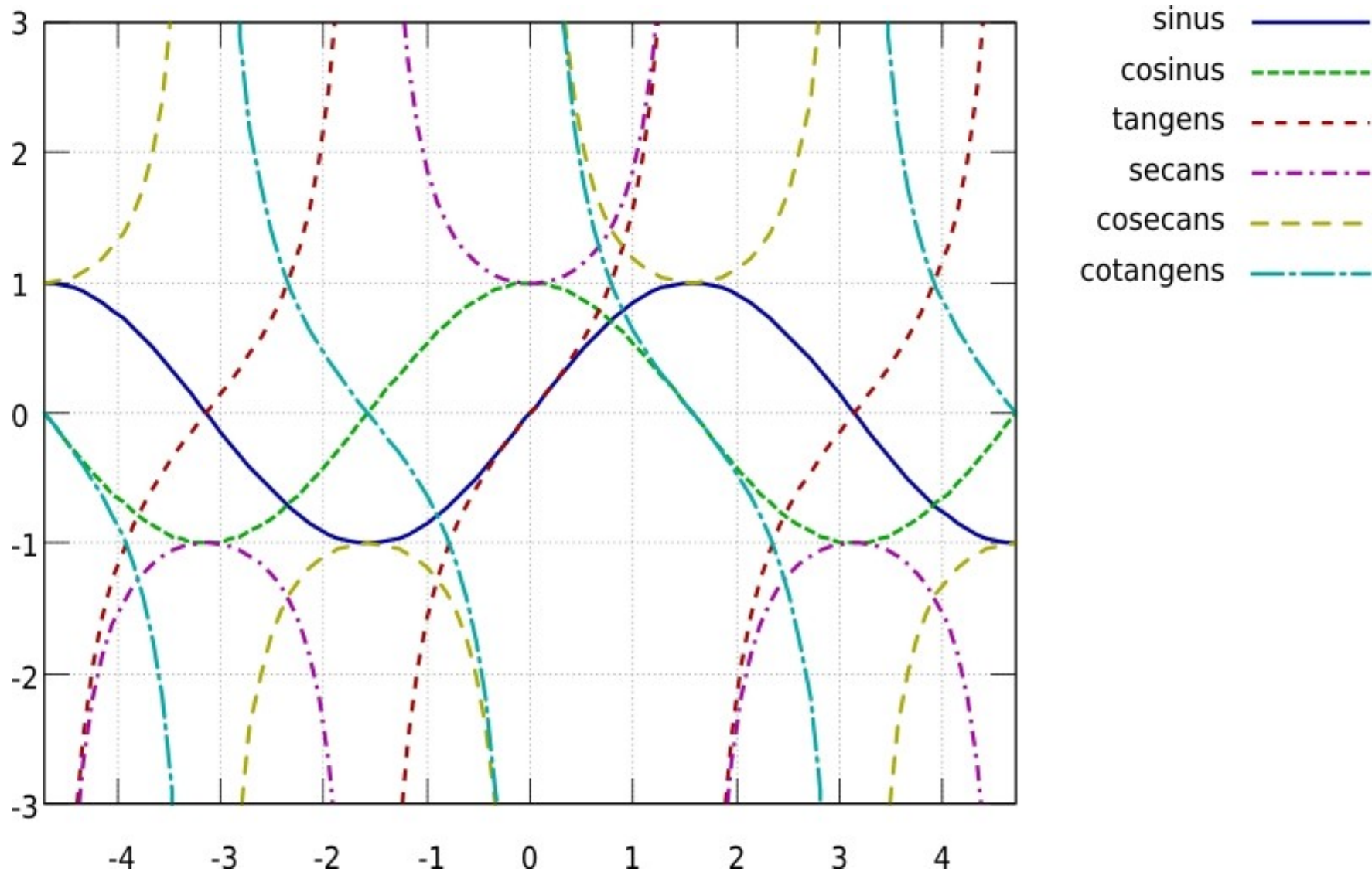
Arabská matematika zná goniometrické funkce od Indů,  
kolem r. 820 překlad *Almagestu* do arabštiny

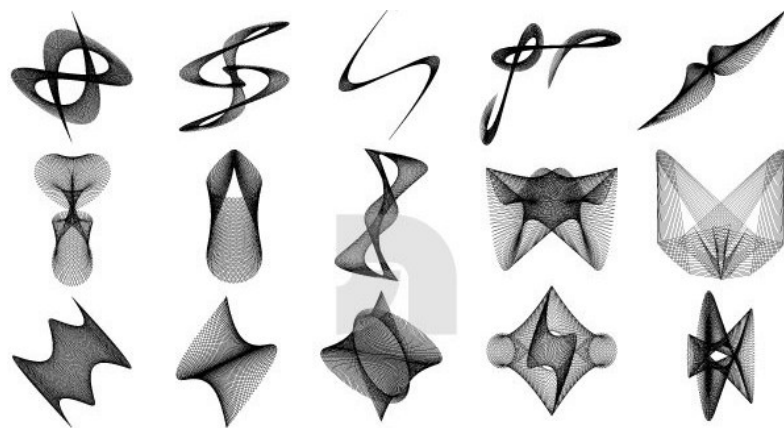
V 10. st. už používají Arabové goniometrické tabulky  
šesti funkcí pro úhly  $0^\circ - 180^\circ$  s přesností na 8 míst

### **Kosinová věta**

Masúd al-Káši, 1427

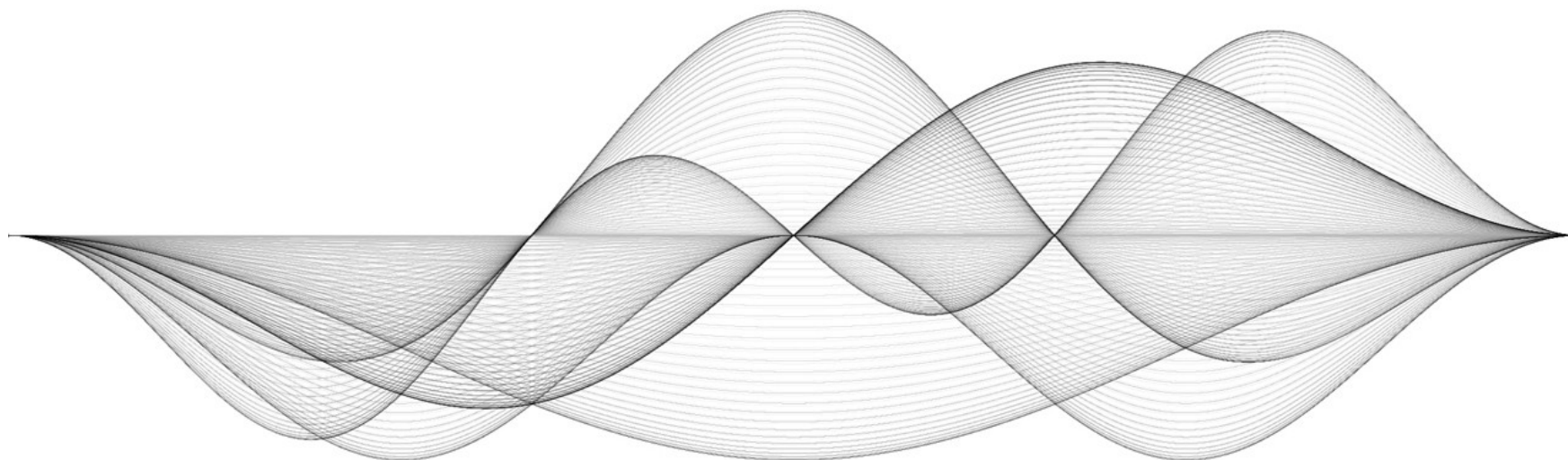






**Nejen praktické — navíc je  
jejich průběh hezký**

**Inklinujeme k líbivosti rytmu,  
opakované lépe vnímáme**



Algorithmic Art - Sine Explosion B

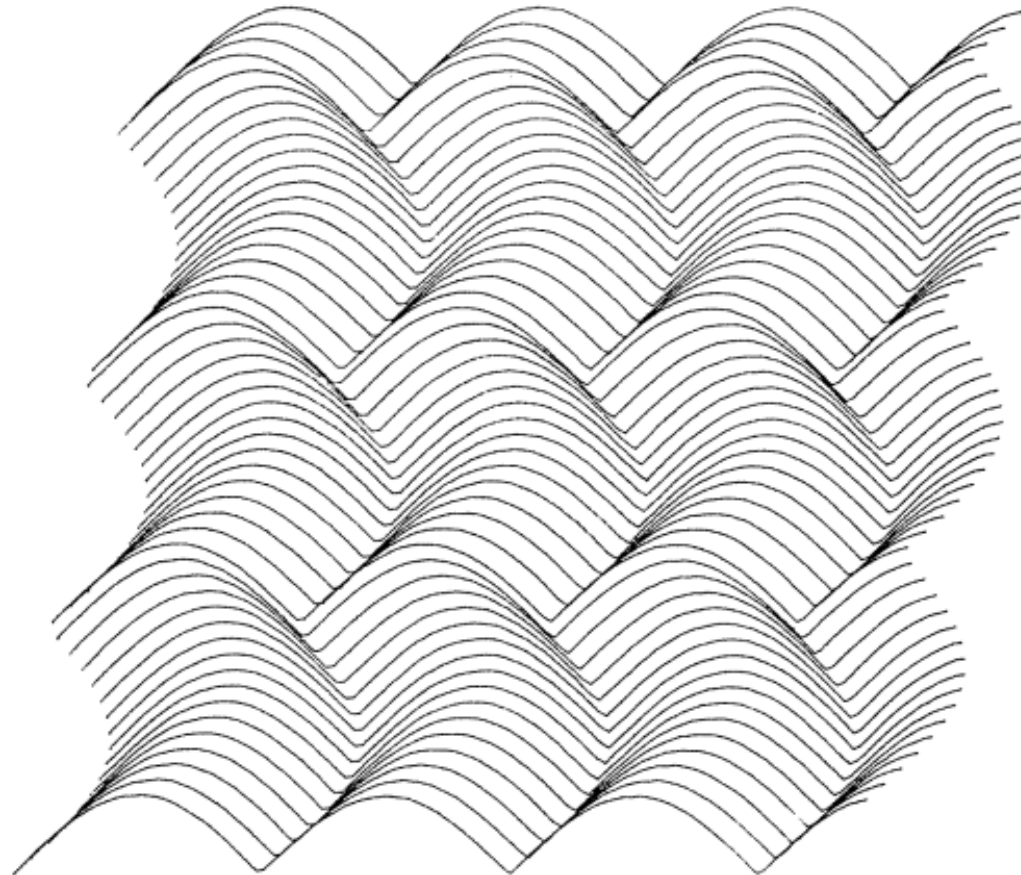
Created by Mahesh Raghvan

## Rytmus generuje symetrii...

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
$\sin\theta =$	$\sin\theta$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\csc\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}$
$\cos\theta =$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\theta - 1}}{\csc\theta}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}$
$\tan\theta =$	$\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta - 1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta - 1}$	$\frac{1}{\cot\theta}$
$\csc\theta =$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\csc\theta$	$\pm\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$	$\pm\sqrt{1 + \cot^2\theta}$
$\sec\theta =$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}$	$\pm\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta - 1}}$	$\sec\theta$	$\pm\frac{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}{\cot\theta}$
$\cot\theta =$	$\pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta - 1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$	$\cot\theta$

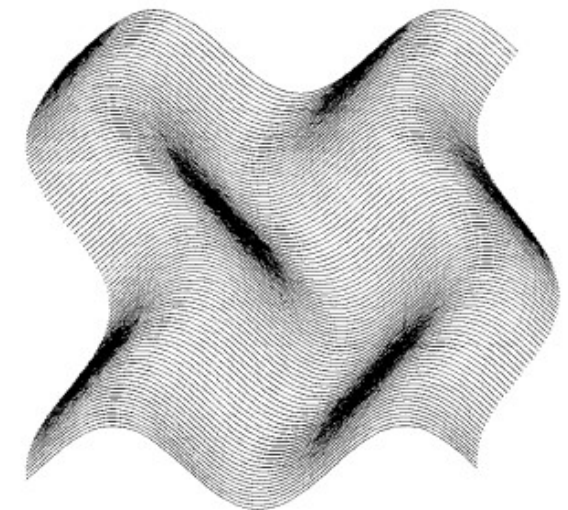
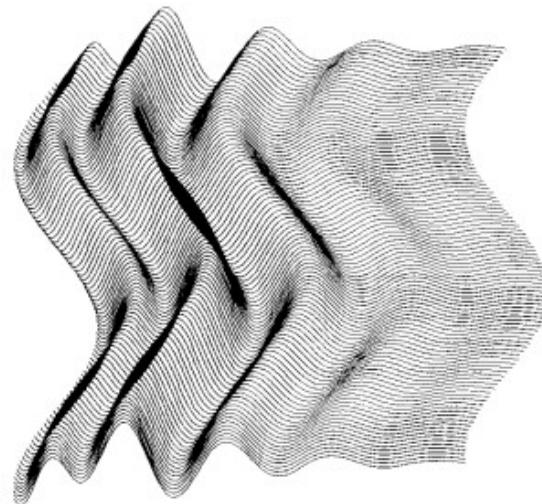
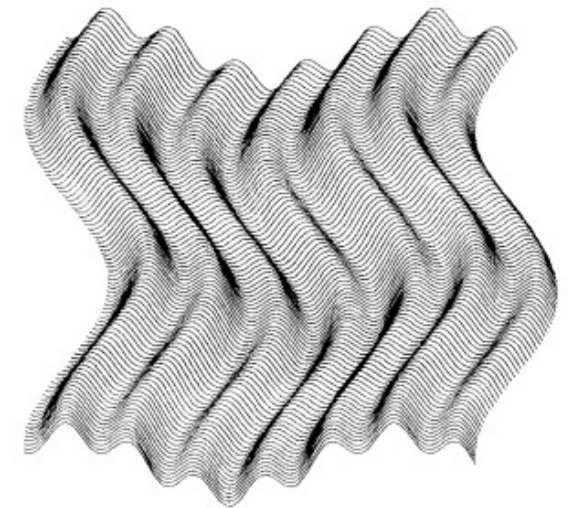
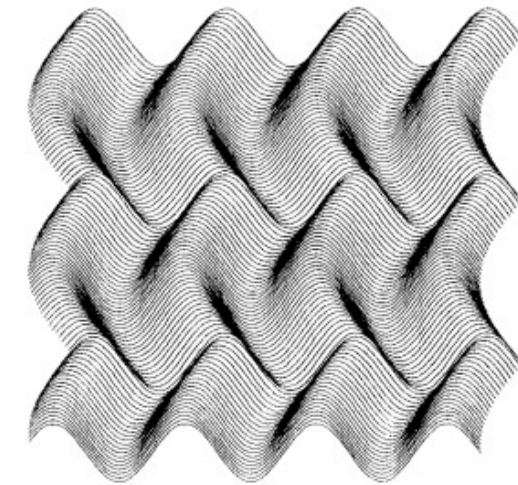


## Prostý efekt absolutní hodnoty aplikované dvakrát na funkci $\sin x$ s posunutím



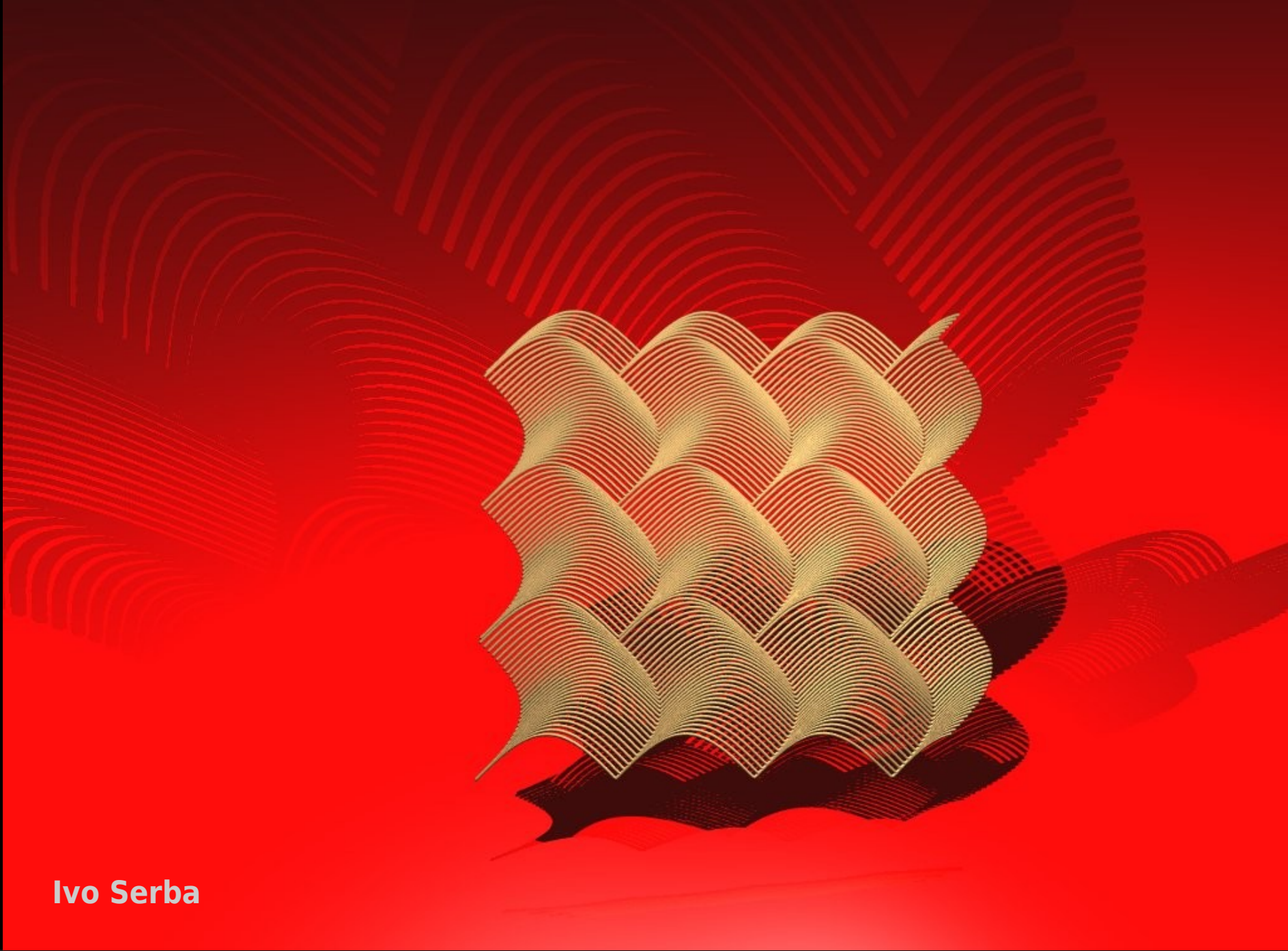
**Goniometrické funkce  
v různých variacích**

**Vícerozměrné funkce  
mohou být periodické  
v každé dimenzi**



**Návrat k abstraktním  
formám konstruktivistické  
fotografie**



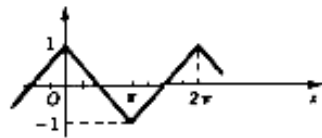


Ivo Serba

## Fourierovy řady

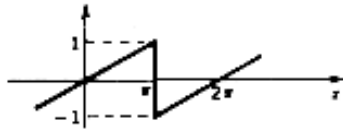
### Frekvenční analýza složitého rytmu

Joseph Fourier, 1807



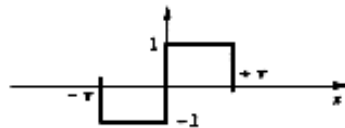
Triangular wave:

$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos(2n+1)x$$



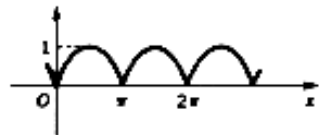
Rectangular sawtooth wave:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin nx$$



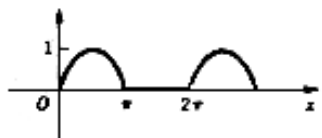
Square wave:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$



Absolute value sine wave:

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx$$



Half sine wave:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx$$

Jakoukoli spojitou funkci lze vyjádřit s libovolnou přesností pouze pomocí sinů a kosinů

## Složitý průběh funkcí umíme rozložit na jednodušší

*„algebra pro práci s rytmem“*

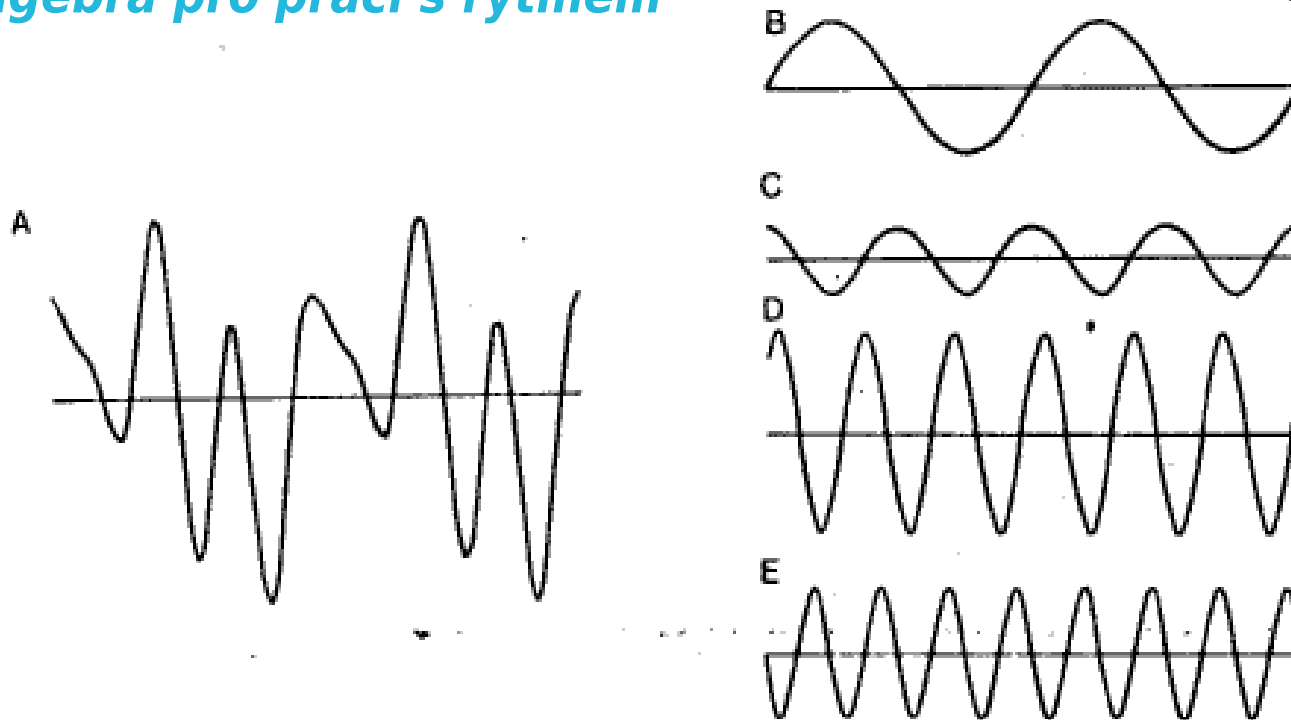


Fig. 1. The wave form A, a complex tone, is in fact the sum of the simple tones B-E. This is an illustration of Fourier's theorem that every vibration of frequency  $f$  can be analyzed mathematically into a series of sinusoidal vibrations with frequencies  $f$ ,  $2f$ ,  $3f$ , etc. These sinusoidal vibrations are called the harmonics.



# Beautiful Dance Moves



$\sin(x)$



$\cos(x)$



$\tan(x)$



$\cot(x)$



$|x|$



$x$



$x^2$



$x^2 + y^2$



$\sqrt{x}$



$\sqrt{-x}$



$\frac{1}{x}$



crap.

# ■ ESTETICKÉ FUNKCE

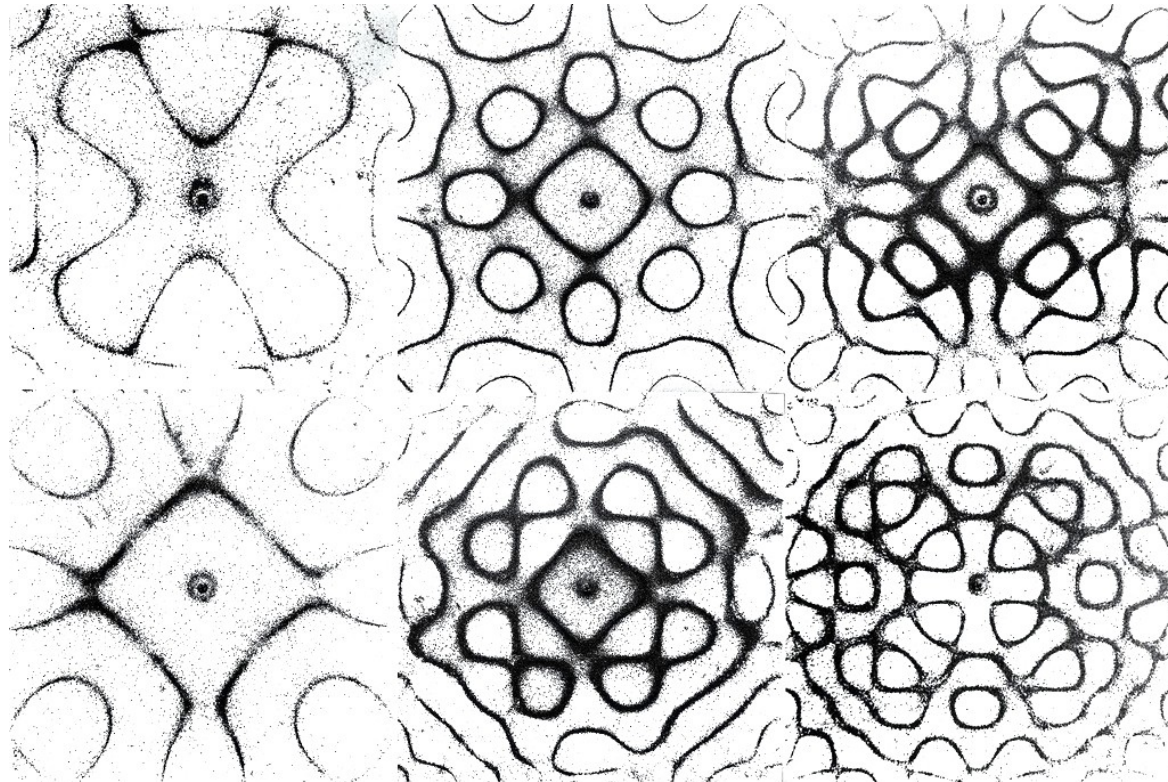
- Periodické funkce
- **Harmonické funkce**
  - **Lissajousovy křivky**
  - vírové spirály
  - motýlí křivka
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - spirografy
- Superfunkce
  - superelipsa
  - superrovnice



## Skládání rytmů

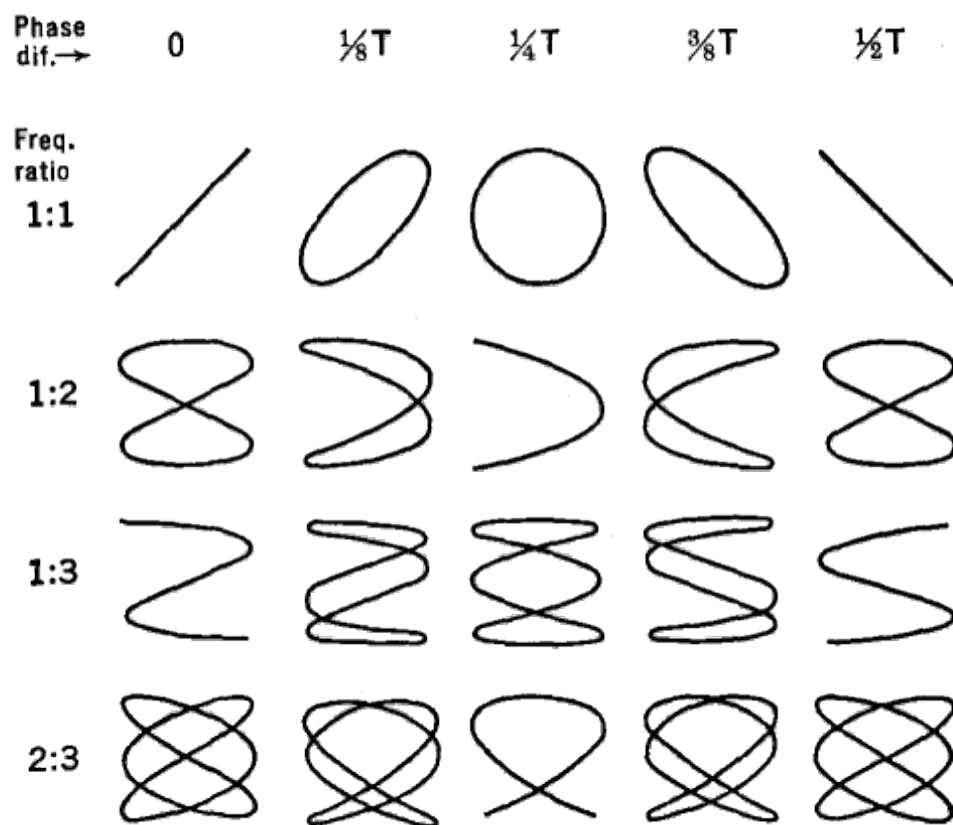
**symetrické frekvenční vzory na vibrační desce**

Ernst Chladni, 1787



## Parametrické kmity

Jules-Antoine Lissajous, 1857

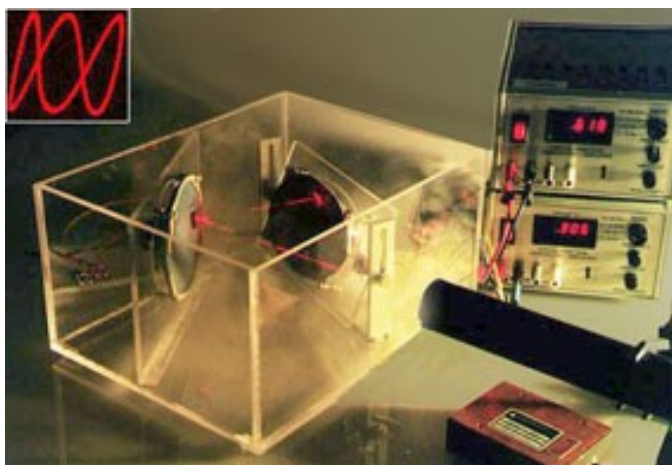
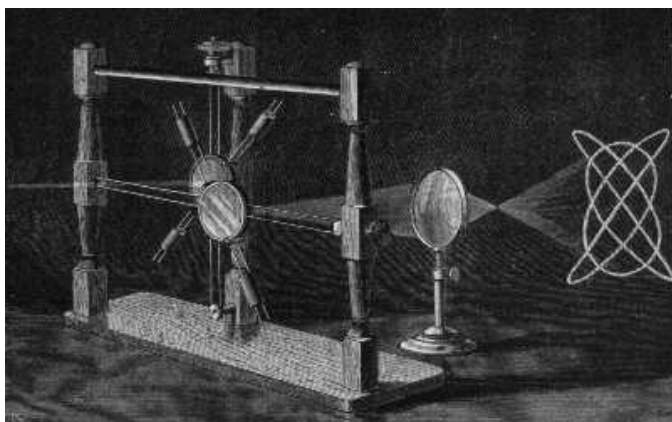


**Trajektorie bodu  
při navzájem kolmých  
harmonických kmitech**

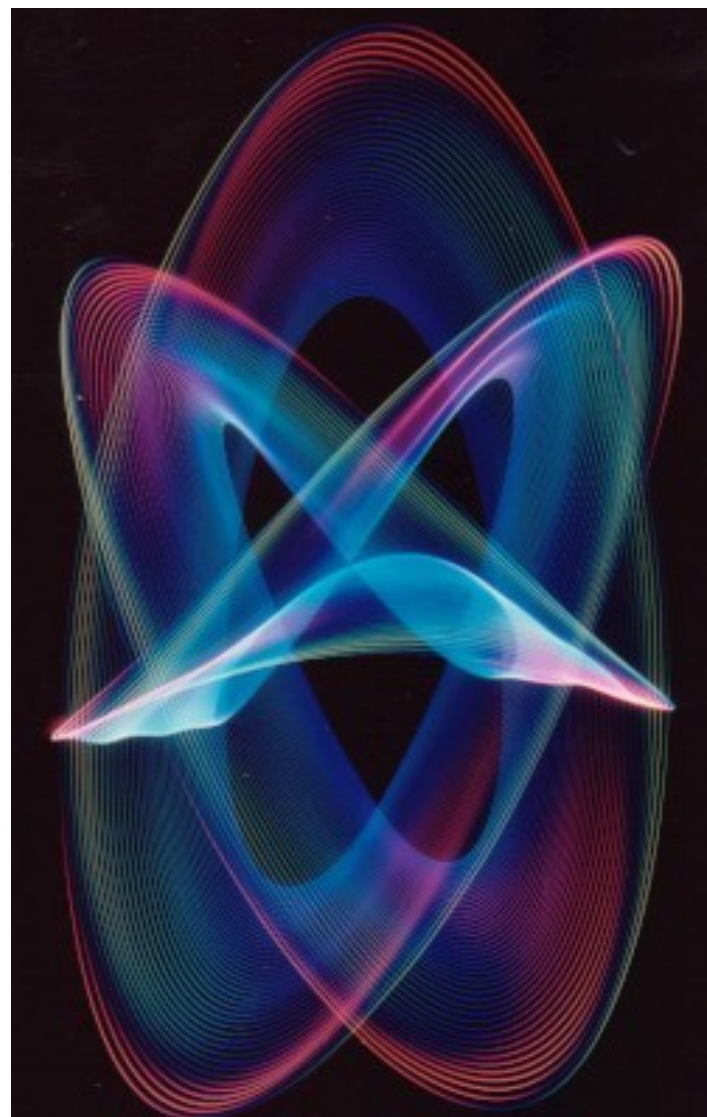
$$x = i \sin(at)$$
$$y = j \sin(bt + p)$$

$i, j$  amplituda  
 $a, b$  úhlová frekvence  
 $p$  fázový posun





Usuff Omar





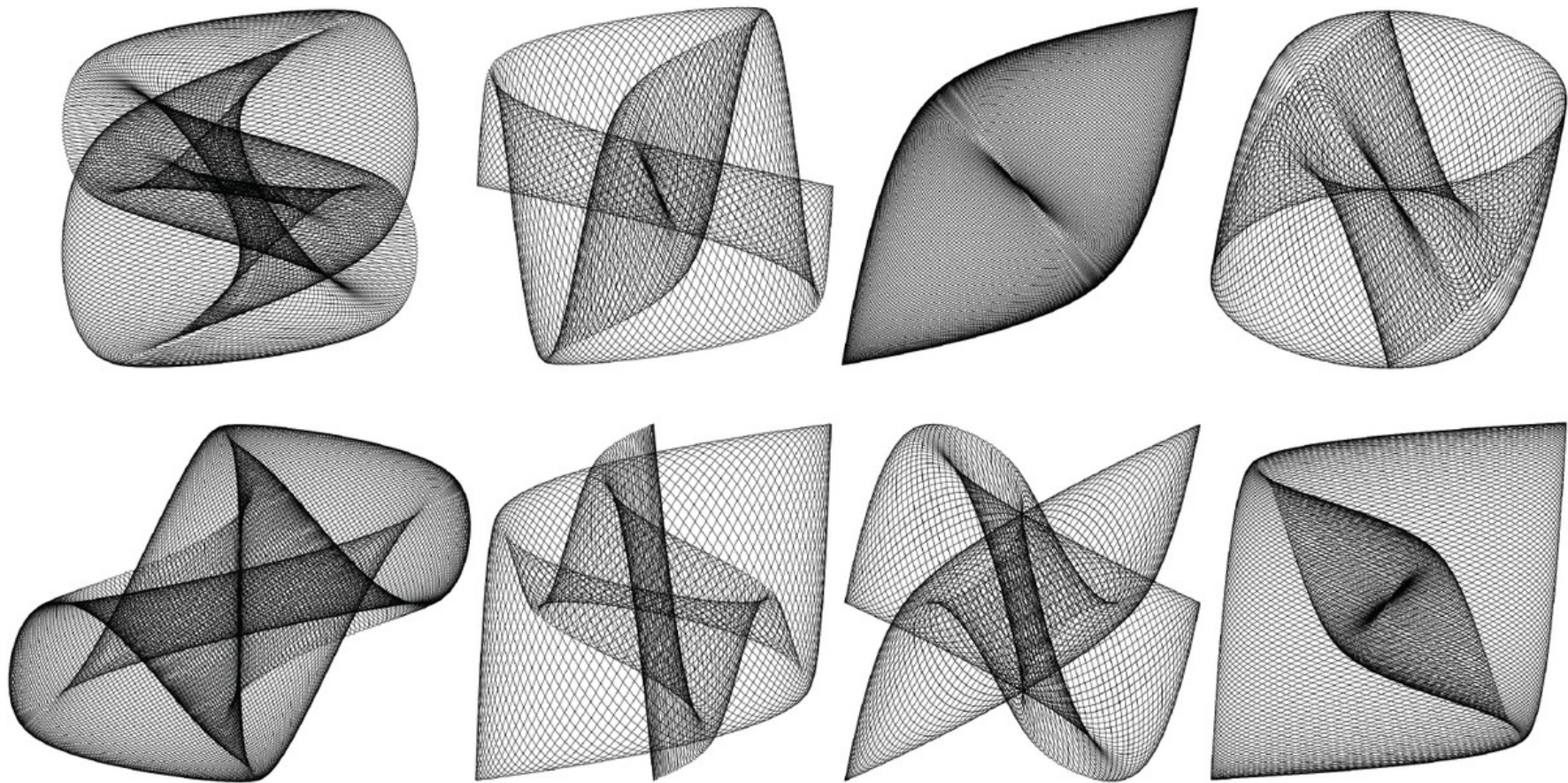
## Vizuální charakteristika — poměr $a/b$ :

- **racionální číslo  $p/q$**   
uzavřená křivka
- **iracionální číslo**  
nekonečný průběh křivky  
ohraničené obdélníkem  $2i \times 2j$

## Malý počet parametrů — velké množství variací

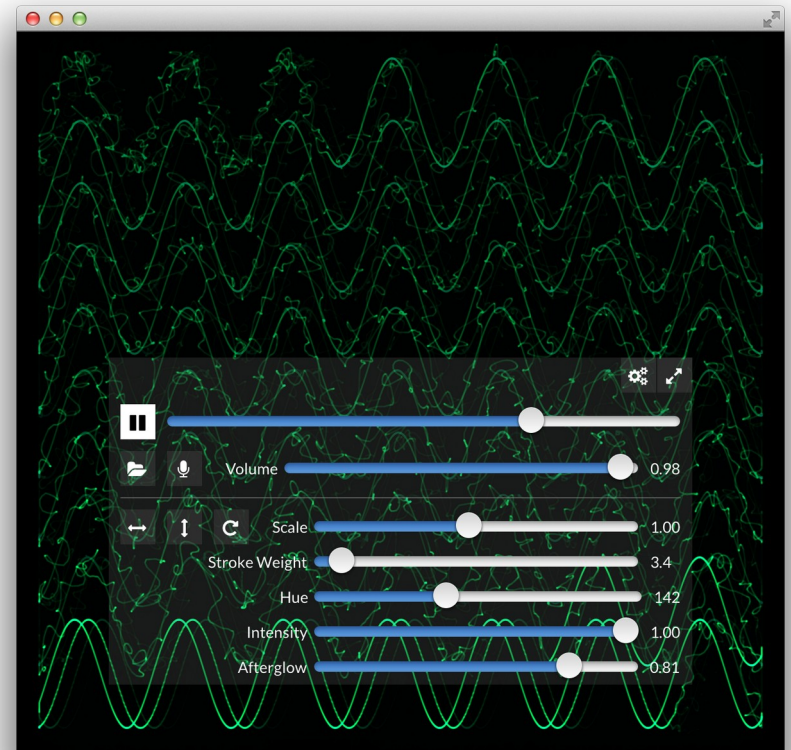
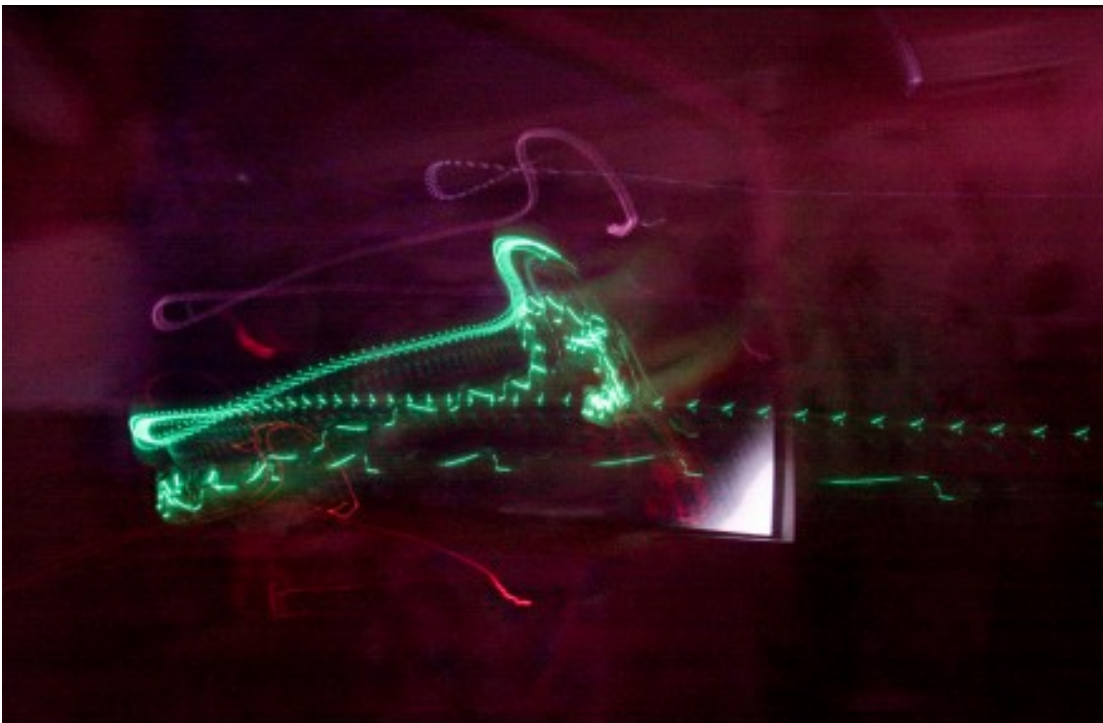
### Speciální případy:

elipsa	$a = b$
kružnice	$a = b, p = \pi / 2$
parabola	$a = 2b, p = \pi / 2$
úsečka	$a = b, p = 0$



➤ *The Harmonograph*





## ➡ Oscilloscope





## Lissajousovy parametrické uzly

$$x(t) = \cos(n_x t + \phi_x)$$

$$y(t) = \cos(n_y t + \phi_y)$$

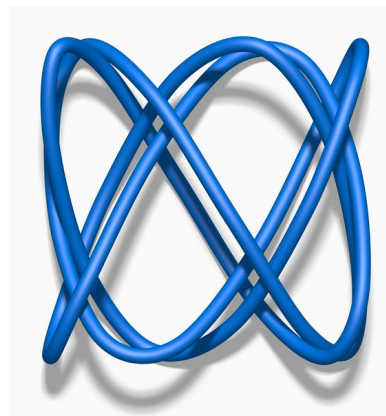
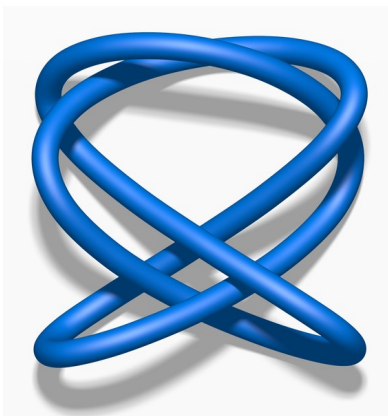
$$z(t) = \cos(n_z t + \phi_z)$$



### Koeficienty $n$ navzájem nesoudělné

Všechny koeficienty liché ~ středová symetrie

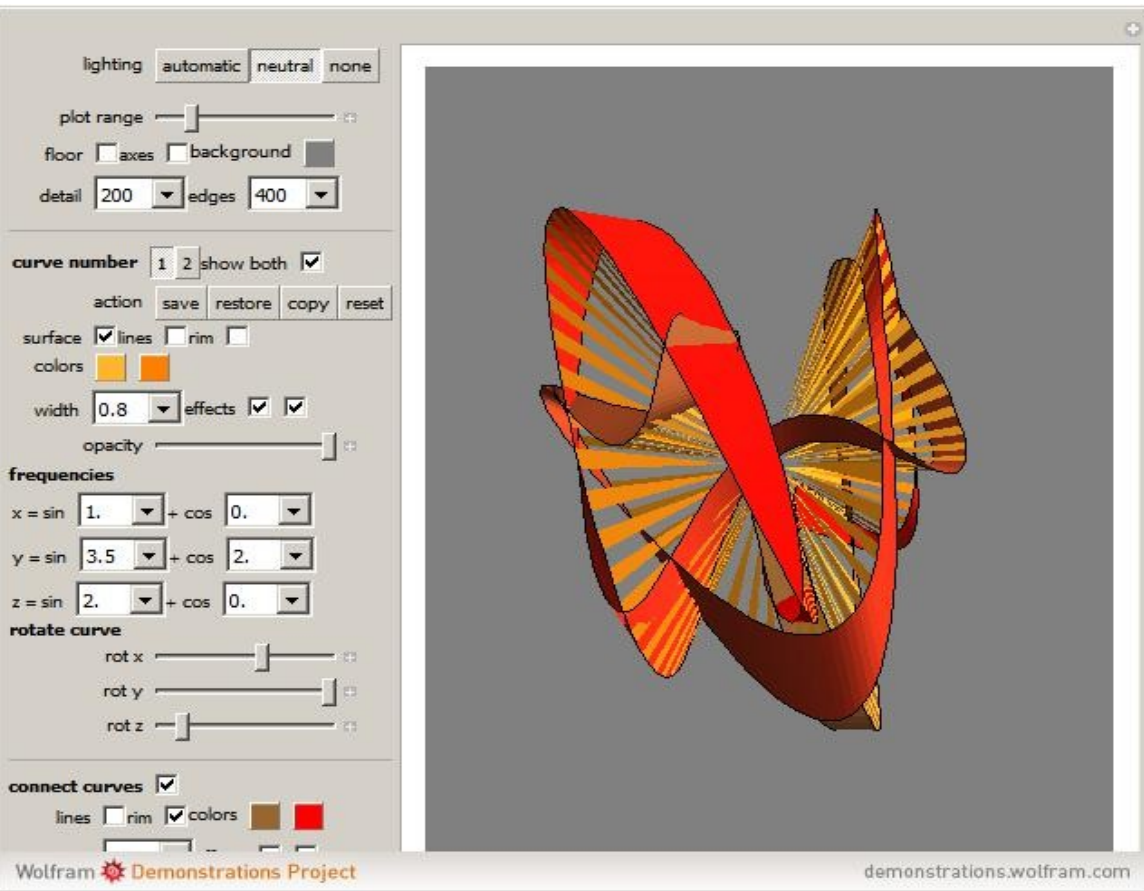
Sudý koeficient ~ 180° rotace okolo příslušné osy



lodní smyčka:  $n = (3, 2, 5)$

čtvercový uzel:  $n = (3, 5, 7)$

# Prostorové modelování = neomezené výtvarné možnosti



➔ **Lissajous3D**





## ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - **vírové spirály**
  - motýlí křivka
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - spirografy
- Superfunkce
  - superelipsa
  - superrovnice



## Vírové spirály

### Vizualizace průběhu harmonických funkcí v polárních souřadnicích

Jacob Bernouilli, 1691

$r$  vzdálenost od počátku

$\theta$  úhel k ose

**kartézské  $\rightarrow$  polární**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} y/x + k\pi$$

**polární  $\rightarrow$  kartézské**

$$x = r \cos \theta$$

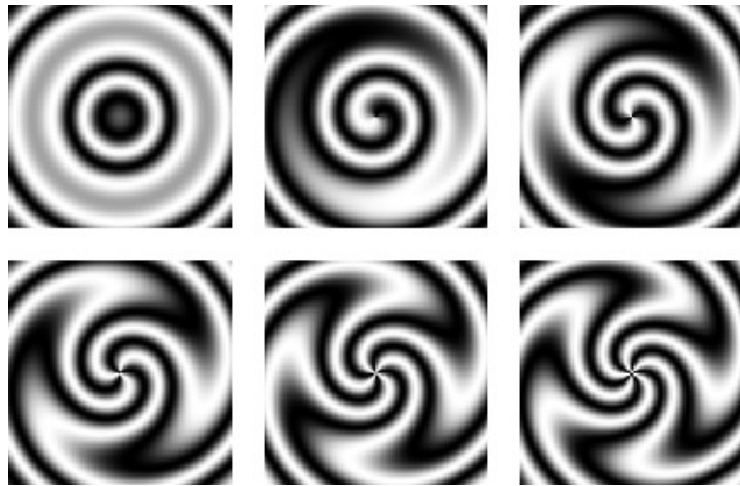
$$y = r \sin \theta$$

## Další parametry:

$R$  míra ‚rozvíření‘

$n$  složitost, počet ramen

$$f(r, \theta) = \sin(R \cos r - n\theta)$$



$R = 6$ , var  $n$

spirální galaxie M51a





**$R = 6, n = 5$**



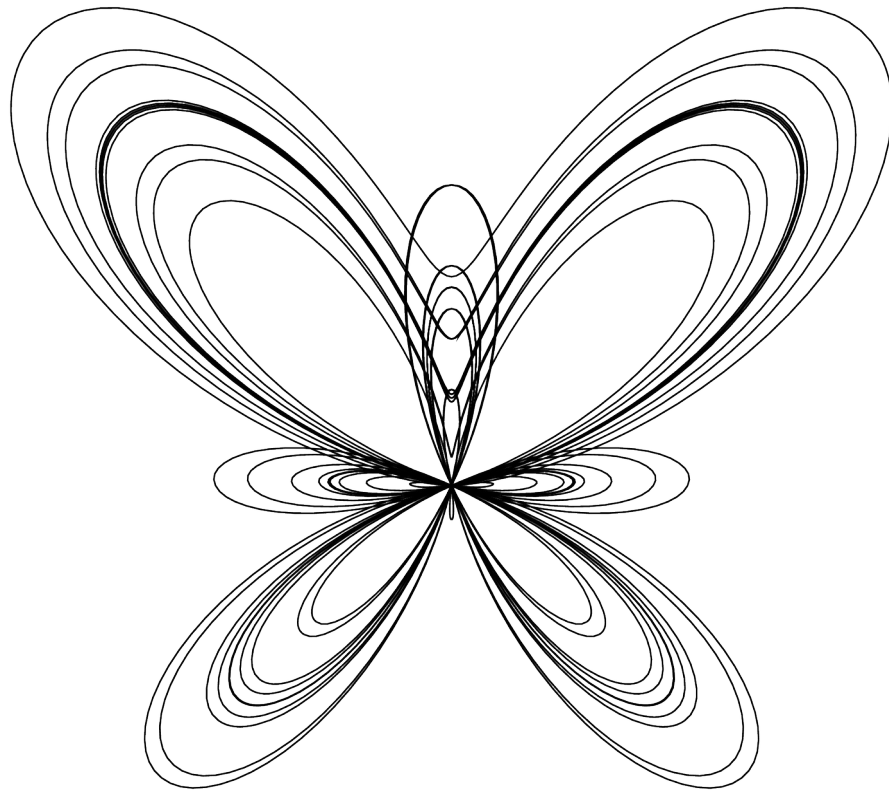
## ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - vírové spirály
  - **motýlí křivka**
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - spirografy
- Superfunkce
  - superelipsa
  - superrovnice



## Motýlí křivka

Temple H. Fay



### kartézsky

$$x = \sin(t) \left( e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) - \sin^5 \left( \frac{t}{12} \right) \right)$$

$$y = \cos(t) \left( e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) - \sin^5 \left( \frac{t}{12} \right) \right)$$

### polárně

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos(4\theta) + \sin^5 \left( \frac{2\theta - \pi}{24} \right)$$

Jenom šest parametrů průběhu

Rytmus, variace, symetrie =  
bohatá estetická forma

[ → ]



Paul Bourke

## ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - vírové spirály
  - motýlí křivka
- **Cyklické funkce**
  - **trochoidní křivky**
  - spirografy
- Superfunkce
  - superelipsa
  - superrovnice





# Výtvarná rotace

trochoidy, kotálnice

Trajektorie bodu při valivém pohybu  
tvořící křivky (*hybné polodie*)  
po základní křivce (*pevné polodii*)

## Cykloida

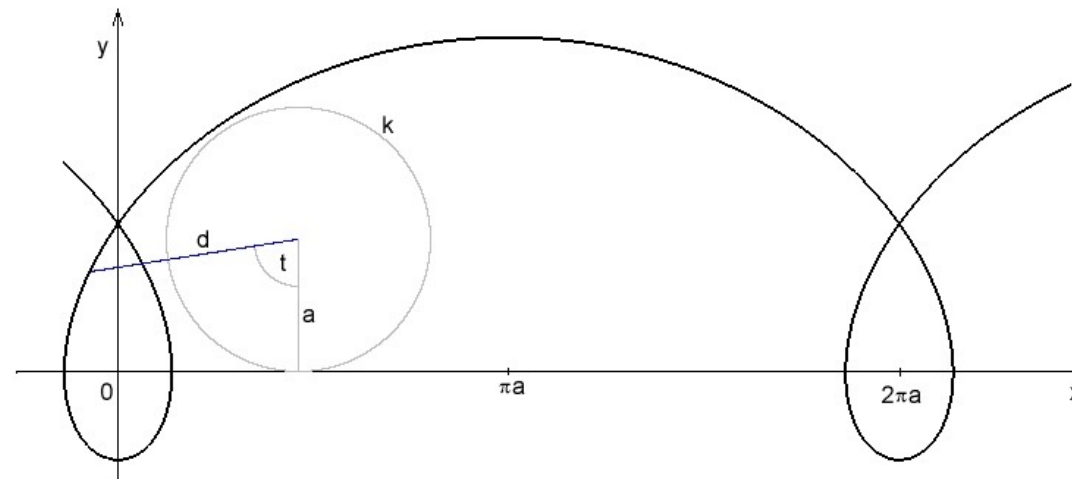
pohyb kružnice  
po pevné přímce

$$x = at - d \sin t$$

$$y = a - d \cos t$$

$d < a$  : zkrácená cykloida

$d > a$  : prodloužená cykloida



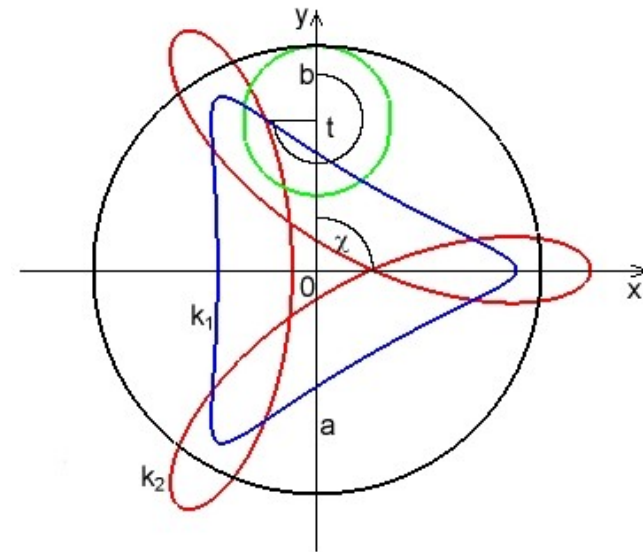
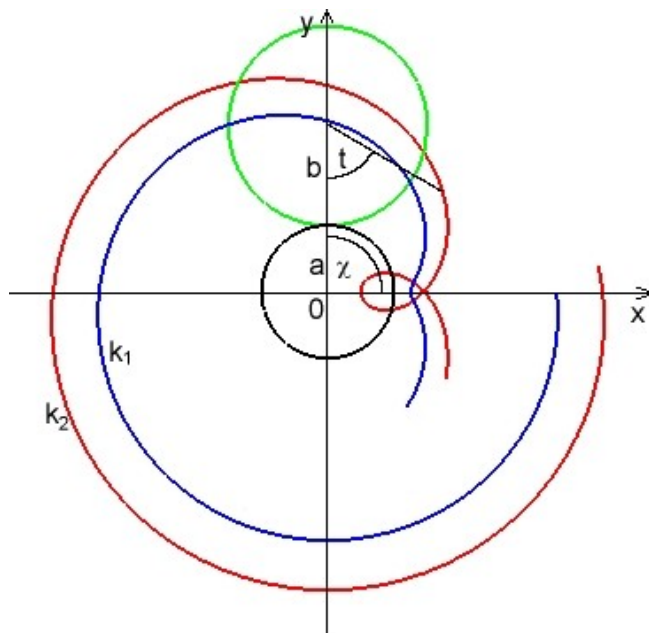
$$p = 2\pi a$$

## Epicykloida

pohyb kružnice (*epicykl*)  
vně základní kružnice (*deferent*)

## Hypocykloida

pohyb kružnice uvnitř základní kružnice



Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené epicykloidy ( $t \in \mathbf{R}$ ):

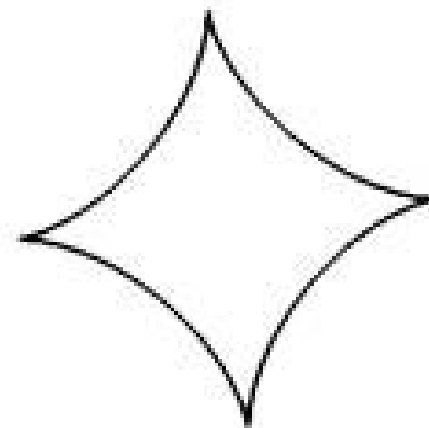
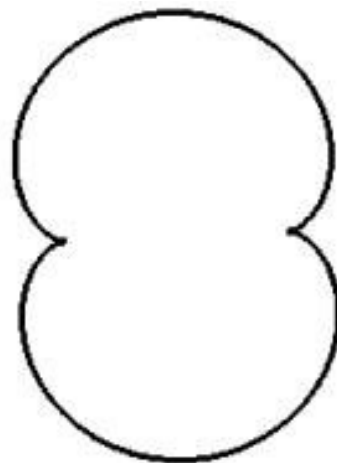
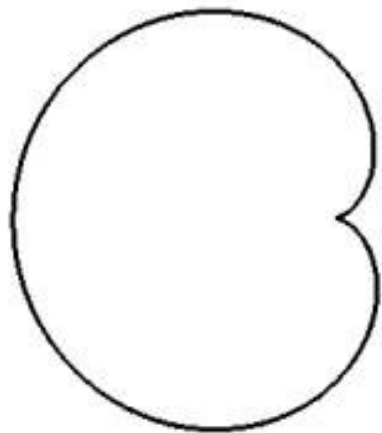
$$x = (a + b) \cos\left(\frac{b}{a}t\right) - d \cos\left(\frac{a + b}{a}t\right),$$

$$y = (a + b) \sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d \sin\left(\frac{a + b}{a}t\right),$$

Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené hypocykloidy ( $t \in \mathbf{R}$ ):

$$x = (a - b) \cos\left(\frac{b}{a}t\right) + d \cos\left(\frac{a - b}{a}t\right),$$

$$y = (a - b) \sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d \sin\left(\frac{a - b}{a}t\right),$$



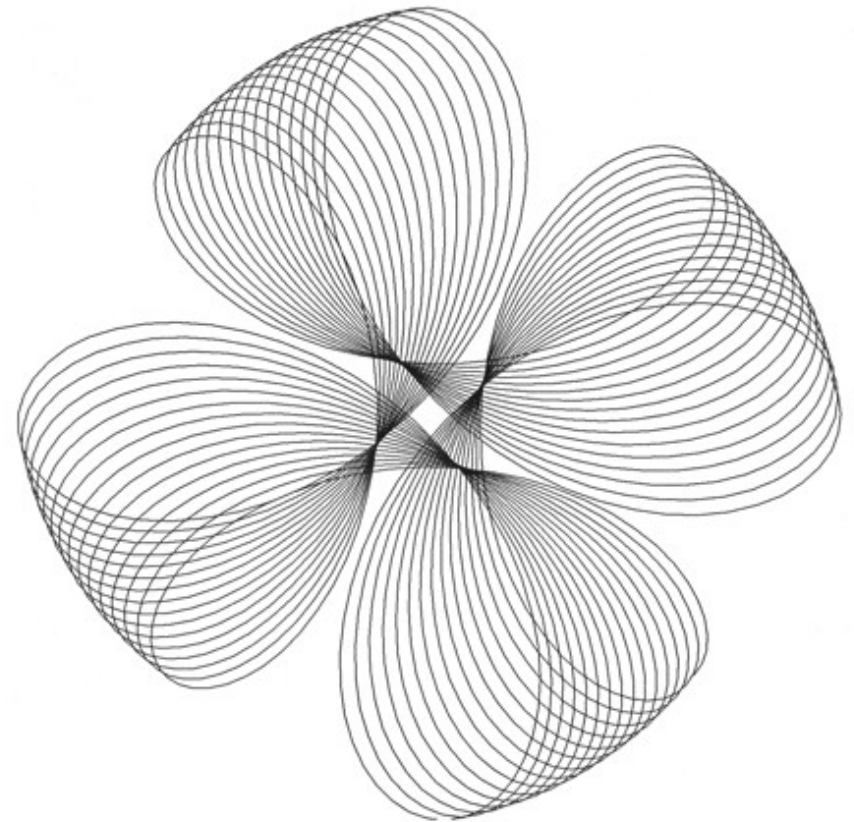
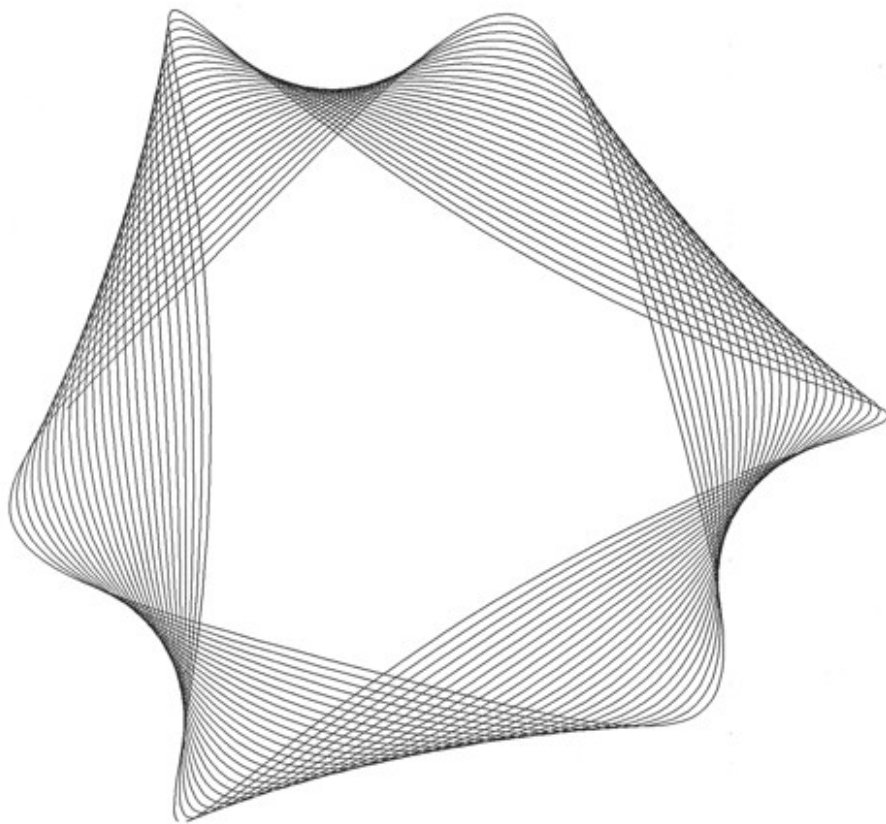
### Speciální případy:

kardioida	prostá epicykloida, $a = b$
nefroida	prostá epicykloida, $a = 2b$
asteroida	prostá hypocykloida, $a = 4b$
úsečka	prostá hypocykloida, $a = 2b$
elipsa	prodloužená / zkrácená hypocykloida, $a = 2b$



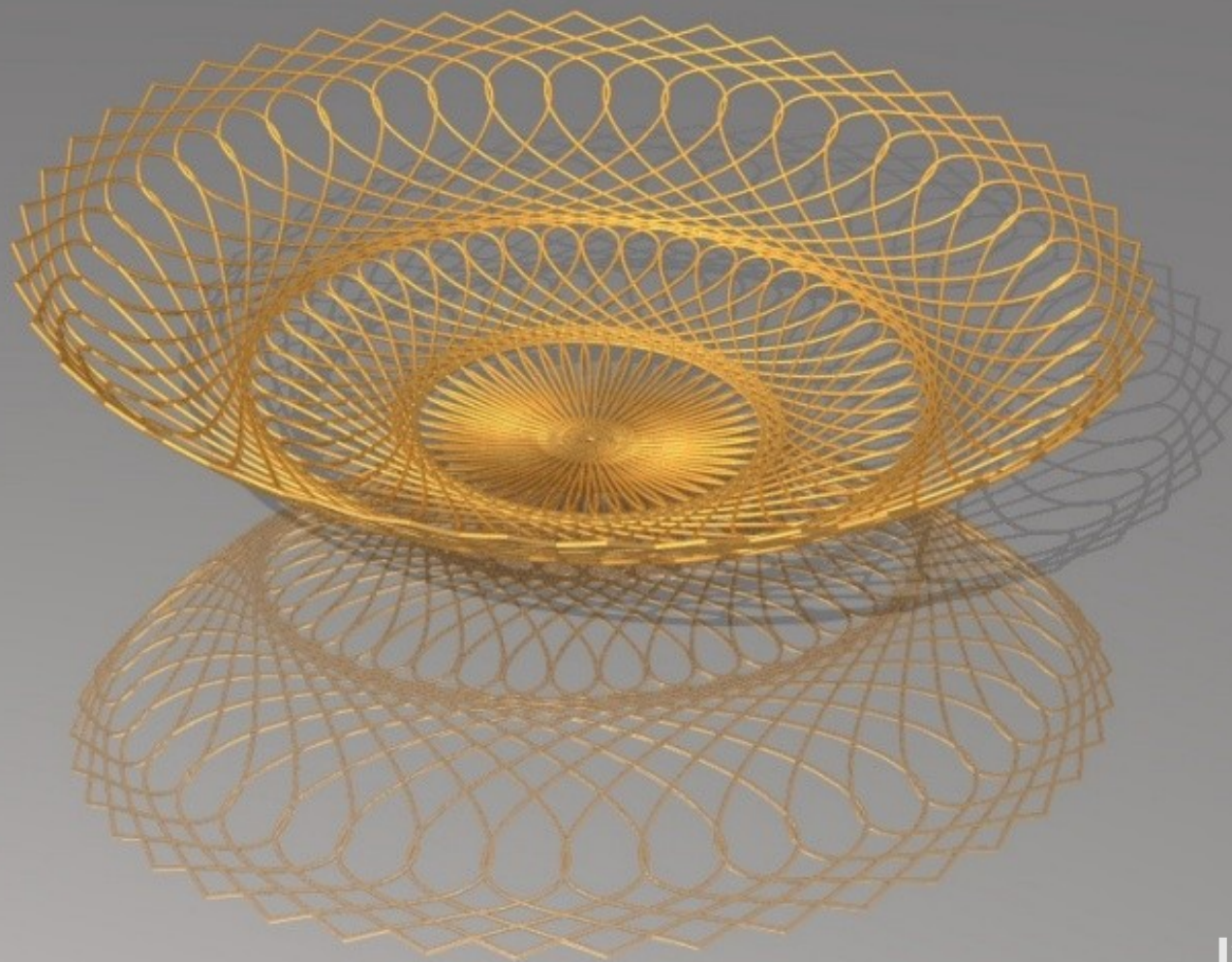
Vizuální charakteristikou je opět poměr  $a/b$  :

- **celé číslo**  
uzavření po jediném oběhu kružnice,  
 $a/b$  je počet segmentů
- **racionální číslo  $p/q$**   
uzavření po  $q$  obězích,  
 $p$  je počet segmentů
- **iracionální číslo**  
nekonečná segmentace neuzavřené křivky



Dvojitý rytmus v postupném vykreslování a celkové segmentaci

**Rozsáhlý prostor pro hledání estetických kombinací  $a, b$**



Ivo Serba

# ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - vírové spirály
  - motýlí křivka
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - **spirografy**
- Superfunkce
  - superelipsa
  - superrovnice





## Jak hledat hezké rozetové křivky – spirografy ?

Místo poměru  $a/b$  chceme spojitou změnu  
= srozumitelnější popis křivek

Rovnici přepíšeme do výhodnějšího tvaru

$$x = x_0[m \cos t + a \cos(nt)] - y_0[m \sin t - a \sin(nt)]$$

$$y = y_0[m \cos t + a \cos(nt)] + x_0[m \sin t - a \sin(nt)],$$

$$m \equiv \frac{q-p}{q}$$

$$n \equiv \frac{q-p}{p}$$

$$x_0 \equiv \cos \theta$$

$$y_0 \equiv \sin \theta.$$

poloměr deferentu = 1

poloměr epicyklu =  $p/q$

vzdálenost od středu =  $a$

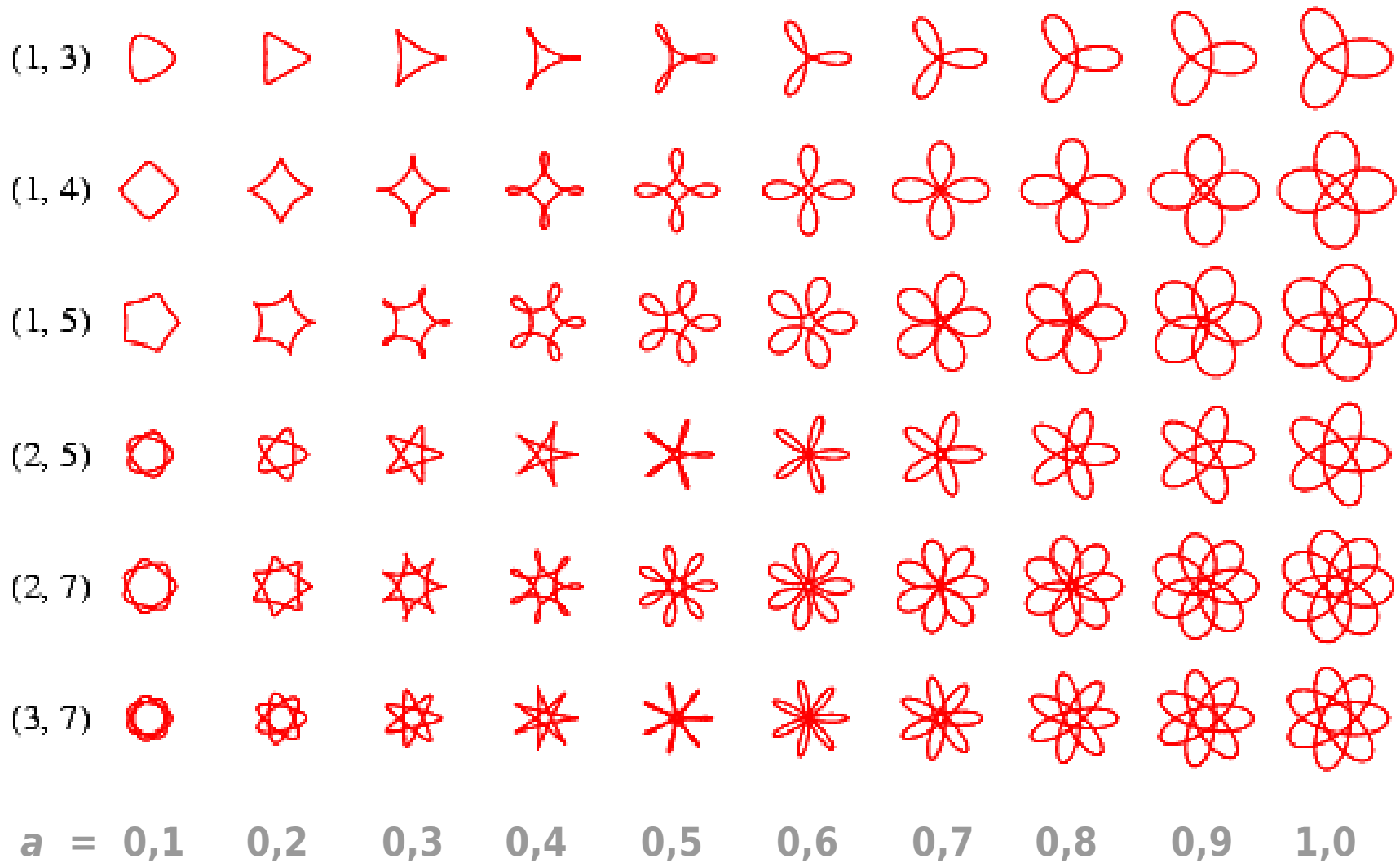
počáteční úhel =  $\theta$

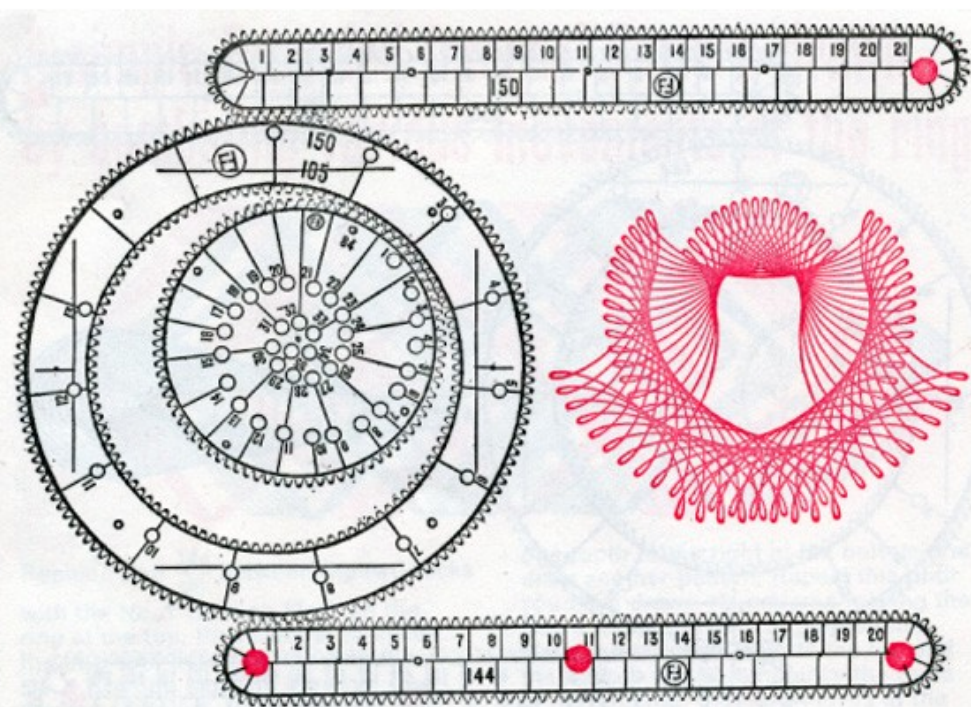
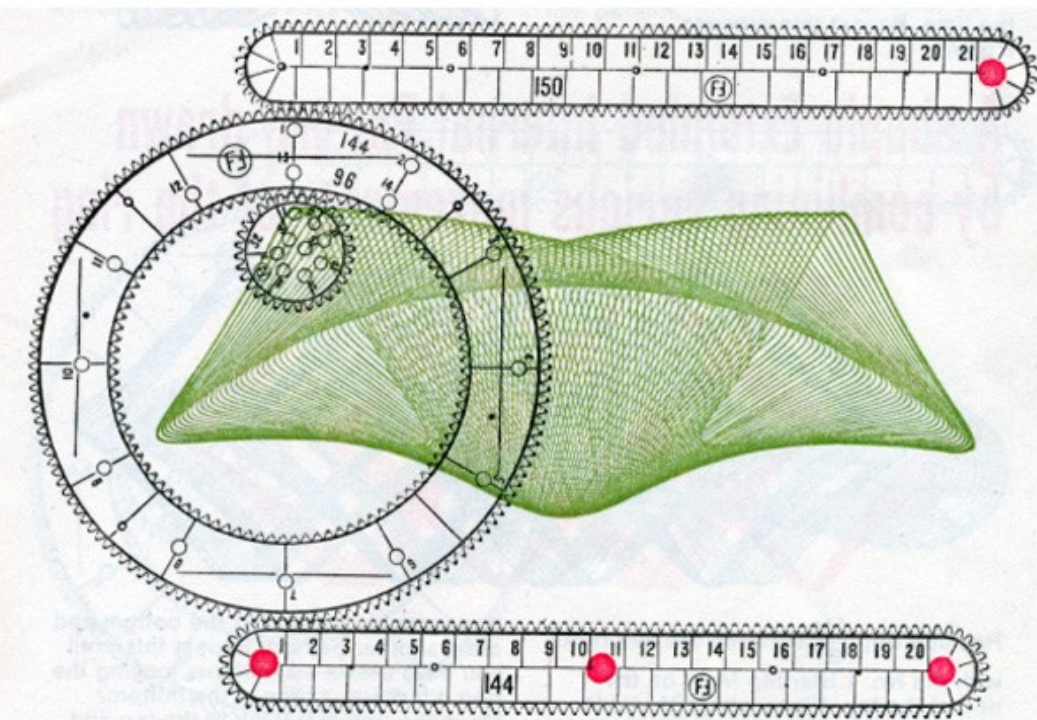
## Katalogové listy pro variace parametrů $m, n$

	$n = 1$	2	3	4	5	6	7
$m = 7$							
6							
5							
4							
3							
2							
1							

Luigi Guido Grandi:  
*Flores geometrici*  
(1728)

$(m, n)$



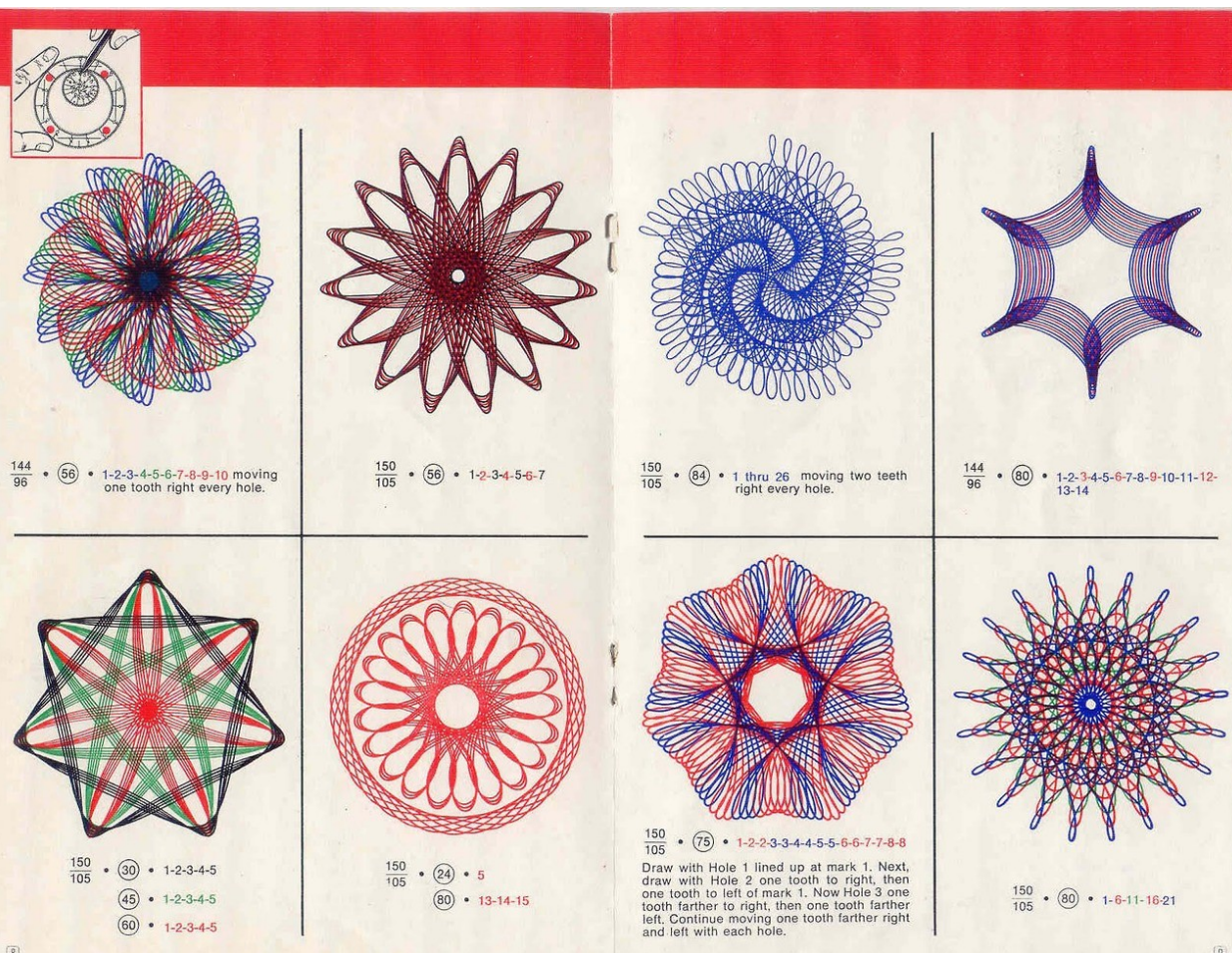


## Spirograph

Denys Fischer, 1965



## Superpozice a obarvování přináší další výtvarné možnosti



➔ *Cycloids*

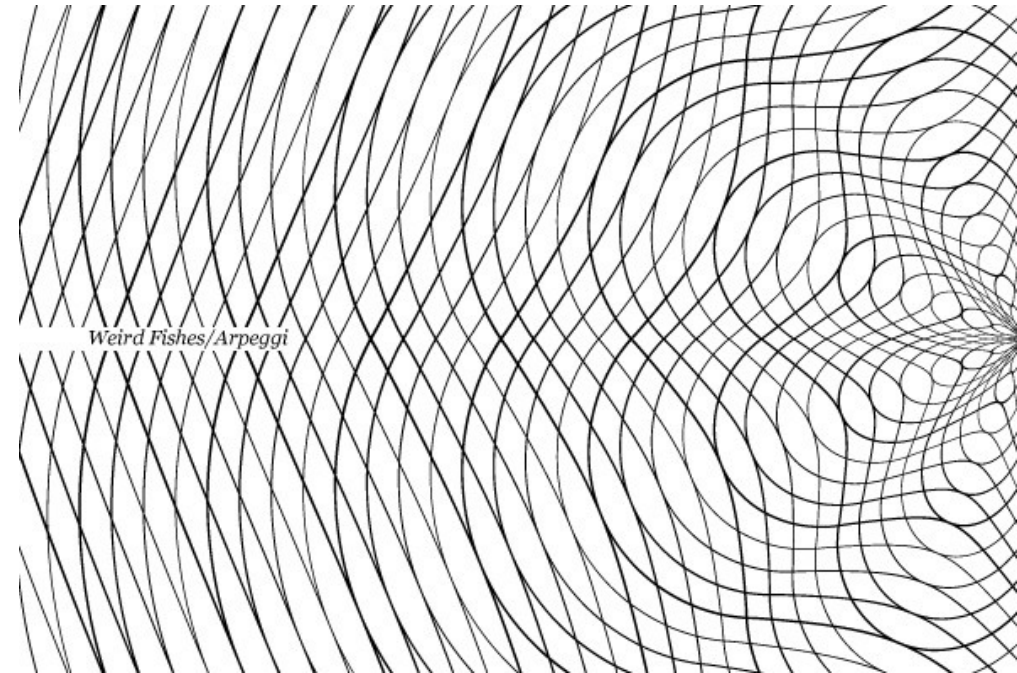
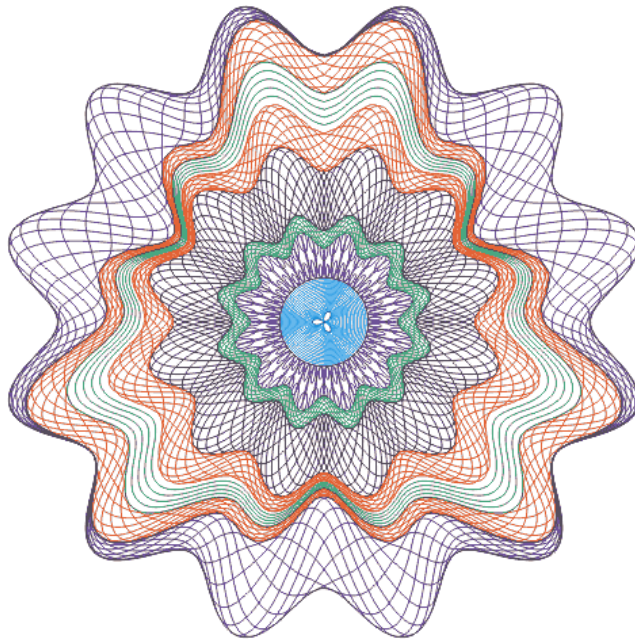
➔ *Spirorama*

➔ *Inspiro3d*

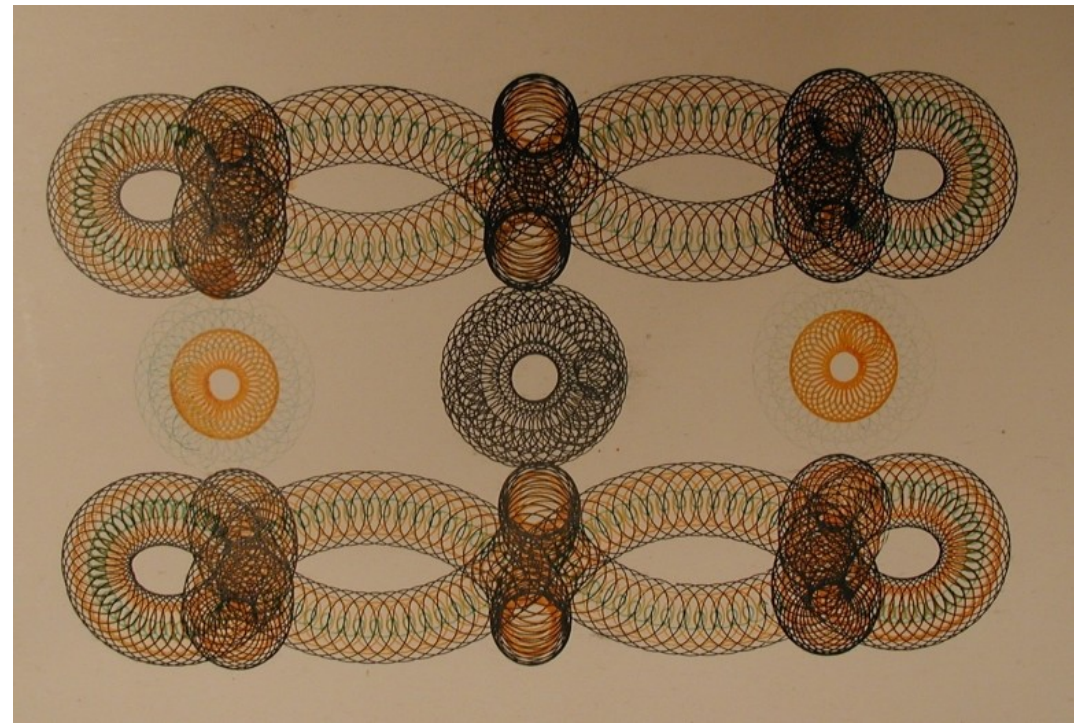
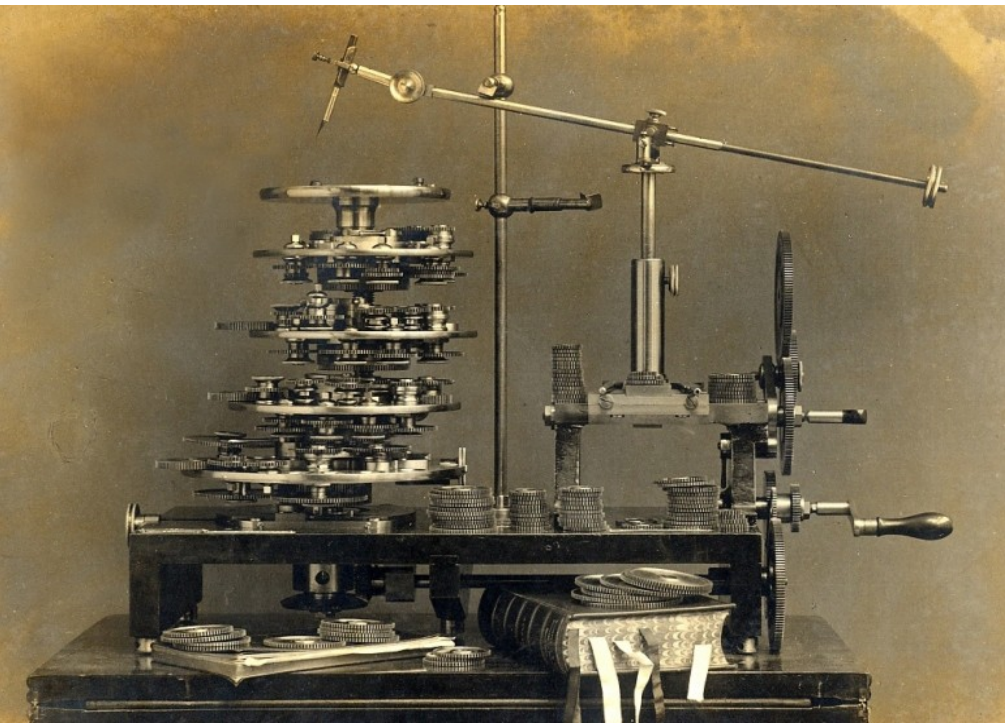


## Guilloché

Ochranné prvky cenin (praktická i estetická funkce)



Při kopírování je kontinuita kresby narušena rozložením bodů do separátních barev

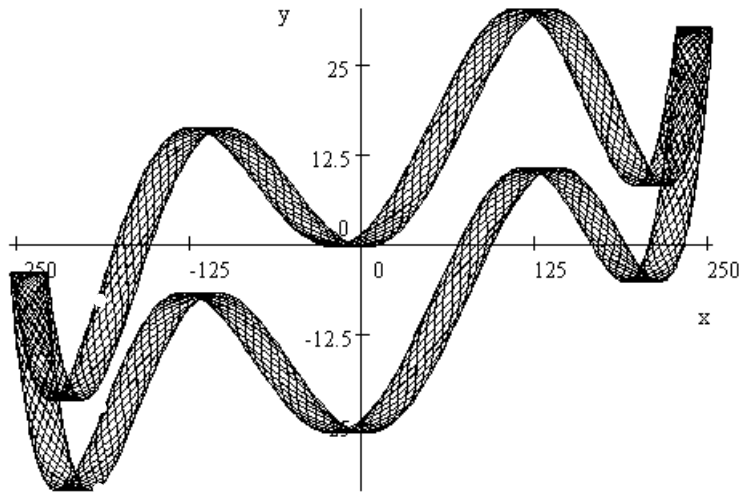


Edwin William Alabone (1908)



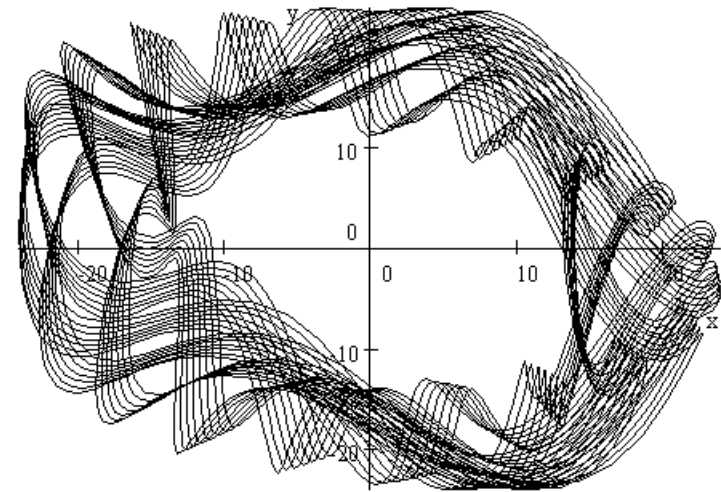
## Dříve pracný mechanický tisk v gilošírkách, dnes matematicky:

$$\begin{aligned}x &= 228 * \sin(t) - 13 * \sin(228 * t/13) + 13 * \sin(t) \\y &= 17 * \sin(t) - 13 * \cos(6 * t) - 13 * \cos(t) \\0 &\leq t \leq 101.\end{aligned}$$

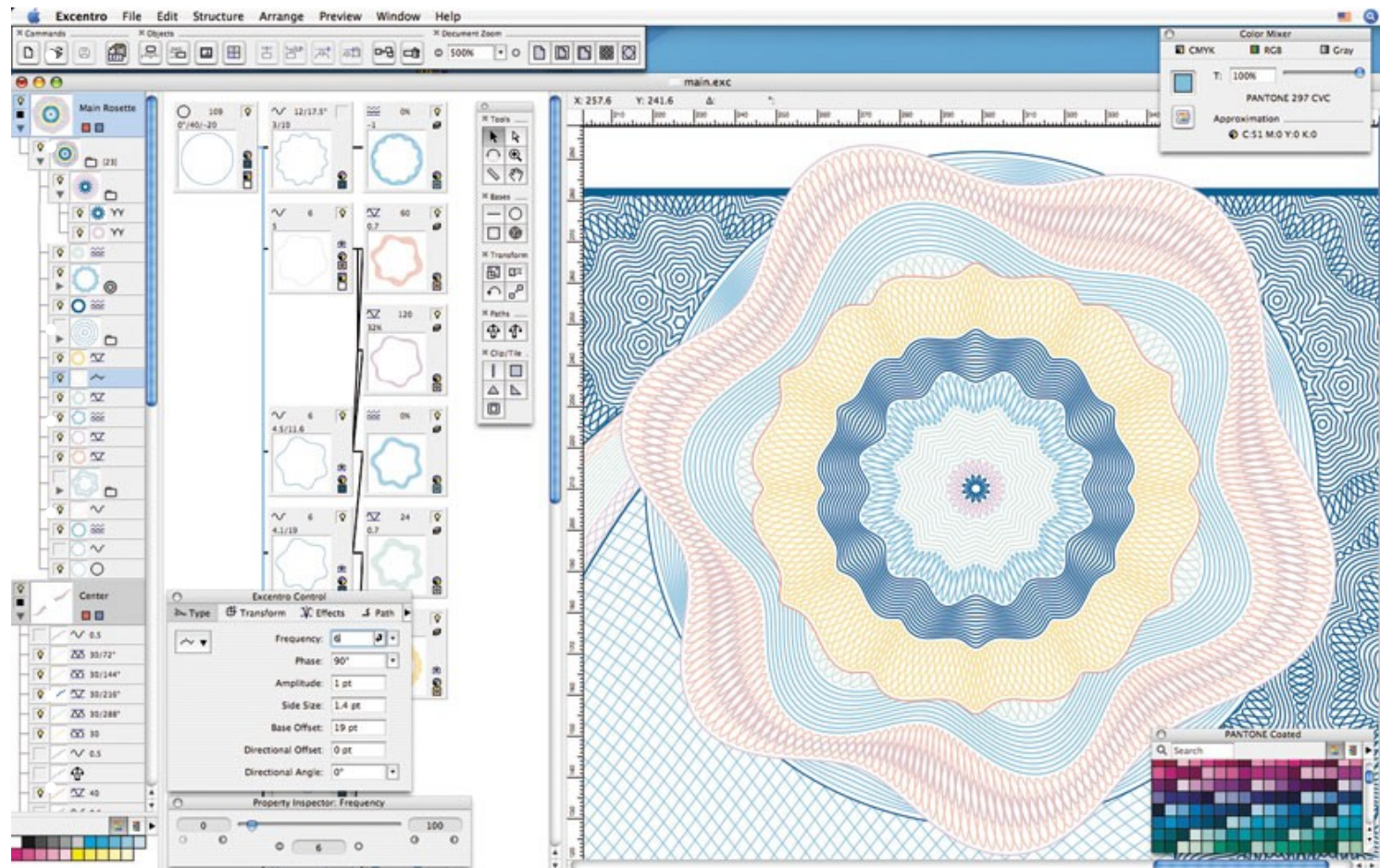


➔ **Guiloché**

$$\begin{aligned}x &= 19 * \cos(1.001 * t) - 5 * \cos(14 * t/5) \\y &= 19 * \sin(.999 * t) + 5 * \sin(29 * t/5) \\0 &\leq t \leq 227.\end{aligned}$$



[ ➔ ]



Definice vnější a vnitřní obrysově křivky, uspořádání, způsobu repetice a superpozice dekorativních vzorů

# ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - vírové spirály
  - motýlí křivka
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - spirografy
- **Superfunkce**
  - **superelipsa**
  - superrovnice





# Lamého křivka

„superelipsa“

Gabriel Lamé, 1818

$$\left| \frac{x}{a} \right|^r + \left| \frac{y}{b} \right|^r = 1$$

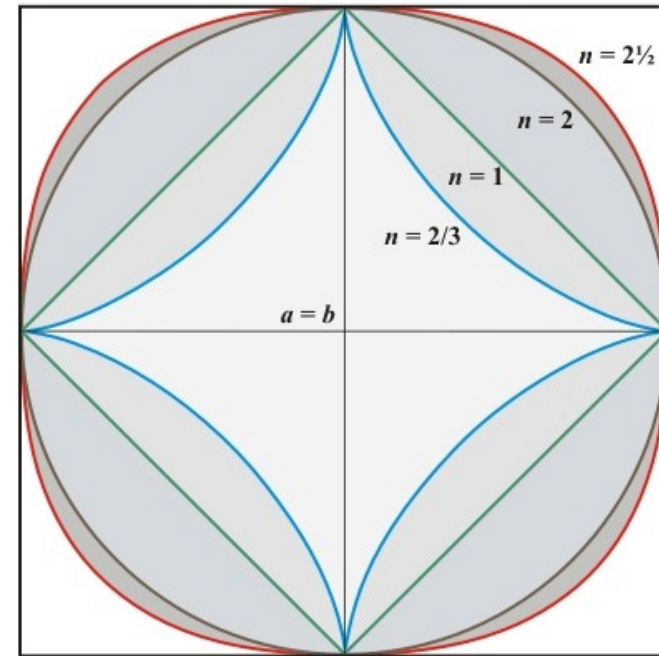
Speciální případy:

$r = 2/3$  asteroida

$r = 1$  kosodélník

$r = 2$  elipsa

$r > 2$  ovál



Při  $r = 5/2$  dostáváme estetickou křivku s dalšími dobrými matematickými vlastnostmi

*Superegg*

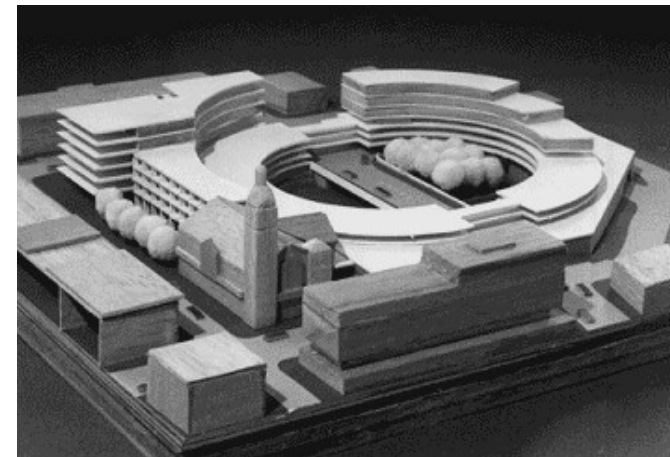
Piet Hein, 1965

rotační elipsoid tvořený křivkou

$$(x/3)^{5/2} + (y/4)^{5/2} = 1$$



ABCDEabcde



**Pris: DKK 299,-**

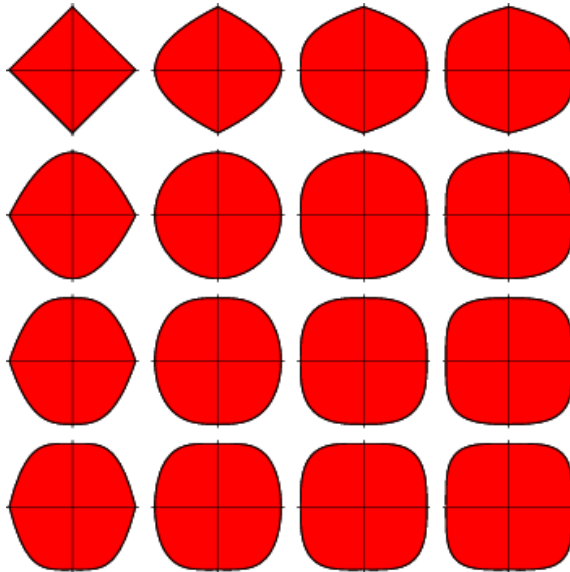


*Man is the animal that draws lines which he himself then stumbles over. In the whole pattern of civilization there have been two tendencies, one toward straight lines and rectangular patterns and one toward circular lines. There are reasons, mechanical and psychological, for both tendencies. Things made with straight lines fit well together and save space. And we can move easily — physically or mentally — around things made with round lines. But we are in a straitjacket, having to accept one or the other, when often some intermediate form would be better. To draw something freehand — such as the patchwork traffic circle they tried in Stockholm — will not do. It isn't fixed, isn't definite like a circle or square. You don't know what it is. It isn't esthetically satisfying. The super-ellipse solved the problem. It is neither round nor rectangular, but in between. Yet it is fixed, it is definite — it has a unity.*

**Piet Hein**

# Zobecnění superelipsy

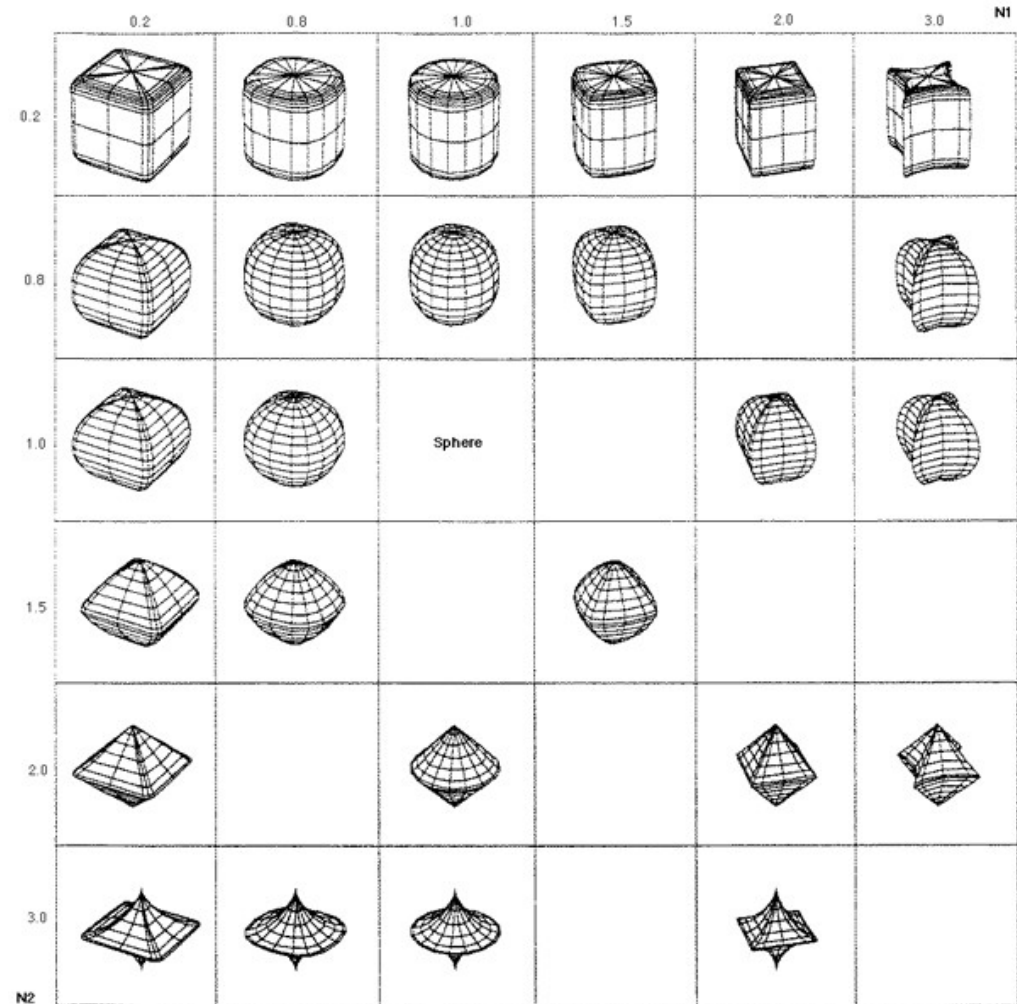
$$|x|^p + |y|^q \leq 1$$



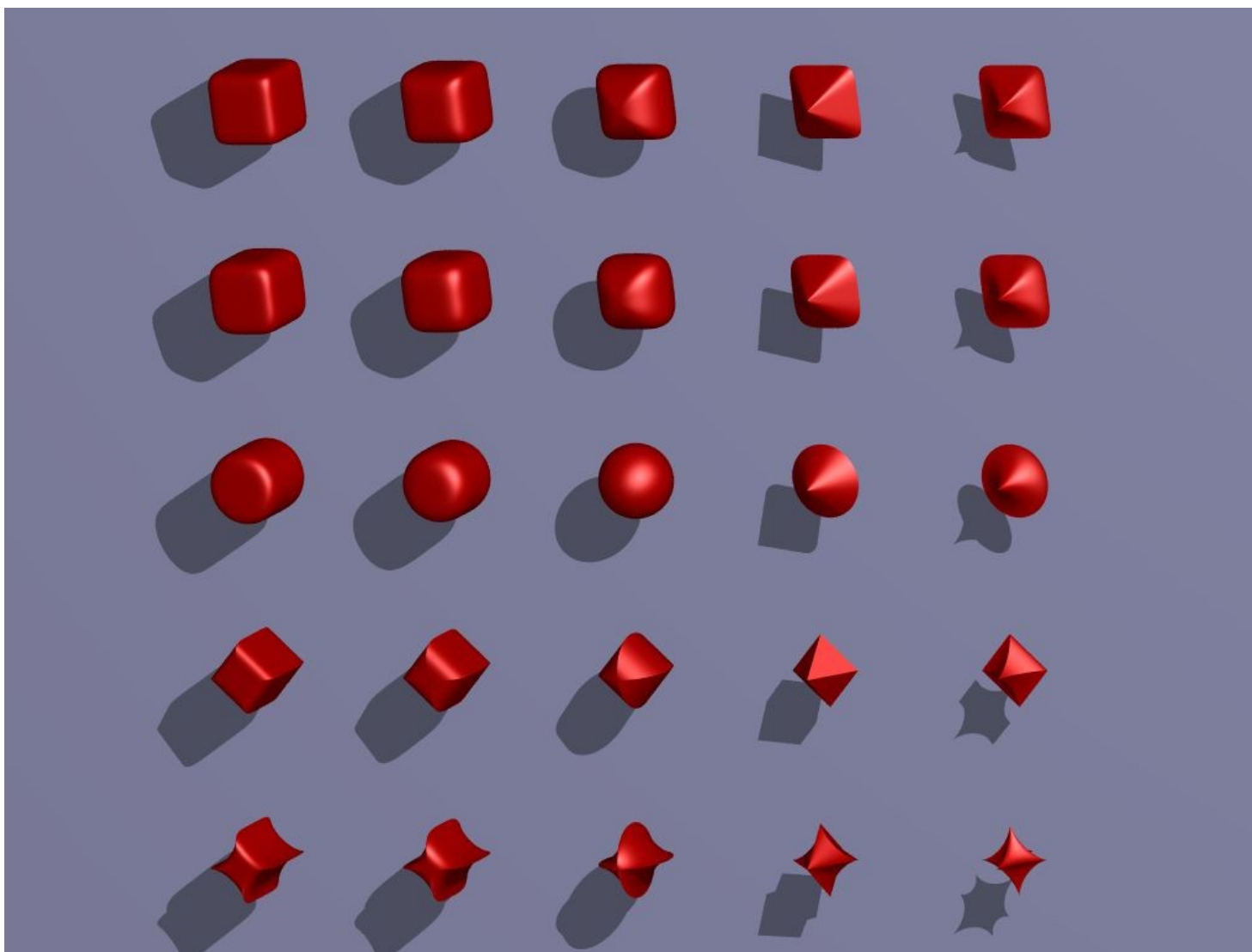
$$p = 1..4, q = 1..4$$

Paul Bourke:

A Geometric Primitive  
for CAD







Katalog prostorových superelipsoidů



## ■ ESTETICKÉ FUNKCE

- Periodické funkce
- Harmonické funkce
  - Lissajousovy křivky
  - vírové spirály
  - motýlí křivka
- Cyklické funkce
  - cykloidy
  - spirografy
- Superfunkce
  - superelipsa
  - **superrovnice**



## Superrovnice

Johan Gielis & Bert Beirinck, 2003

**Modifikace superelipsy v polárních souřadnicích,  
další zobecnění — šest parametrů**

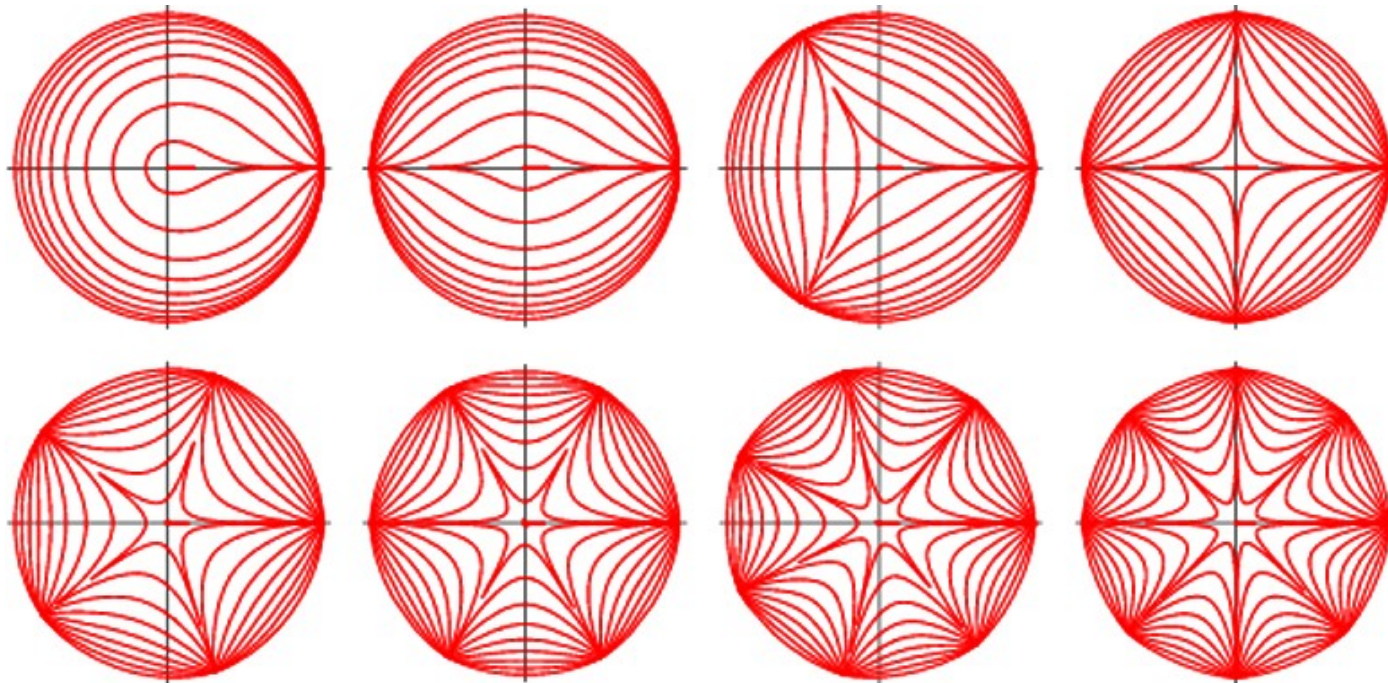
$$r(\theta) = \left[ \left| \frac{\cos(\frac{1}{4}m\theta)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin(\frac{1}{4}m\theta)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-1/n_1}$$

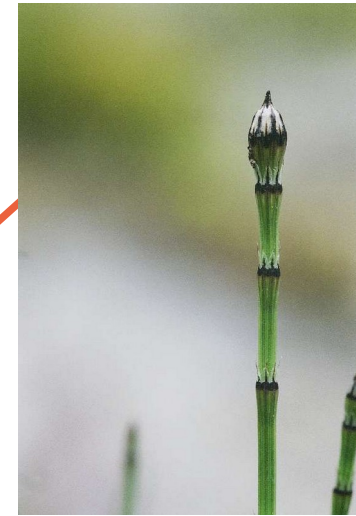
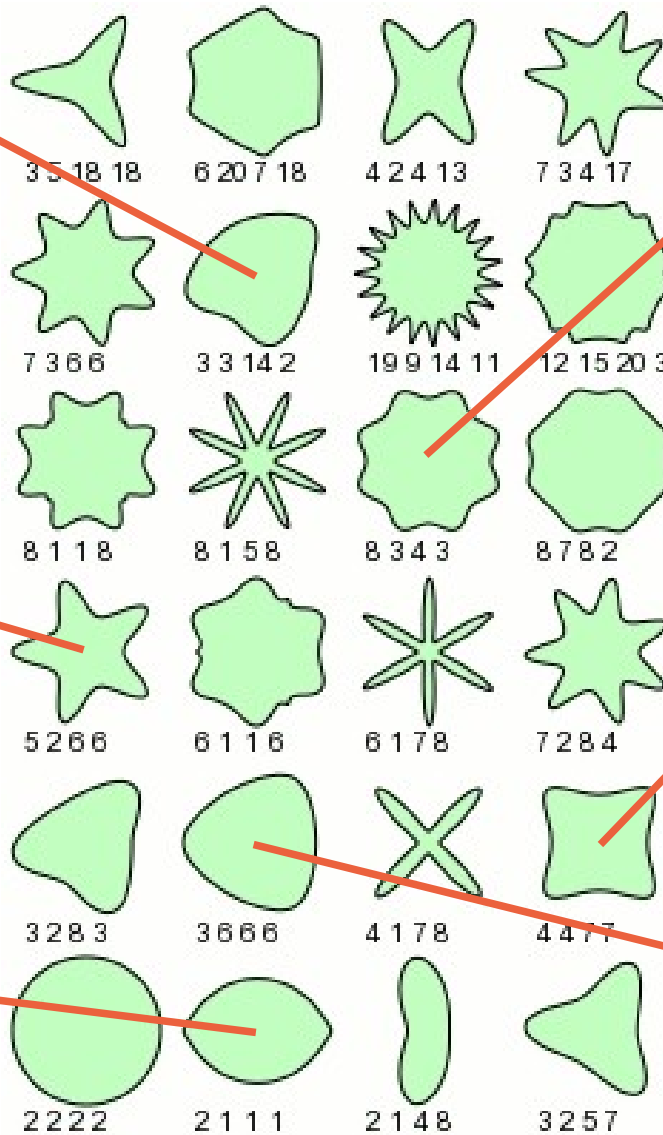
**Využití:**

**elegantní modelování přírodních forem**

## Katalogové vzory tvarů,

$a = b = 1, n_1 = n_2 = n_3 \in 0..3, m \in 1..8$







**Glies superfunction**  
File Genetic Algorithm

Population size [20]

N. of generations [100]

Prob. of mutation [1.00]

Prob. of crossover [0.01]

P. of Replacement [0.25]

Number of offspring [2]

Glies Superfunction formula:

$$r(\phi) = \left[ \left| \frac{\cos(1/4 * m * \phi)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin(1/4 * m * \phi)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-1/n_1}$$

A 4.6010241508  
B 6.2835884094  
M 7.9752764702  
N1 5.8353500366  
N2 3.0328500271  
N3 0.7870215178

Michal Lichvár: koeficienty hledány genetickými algoritmy



## Prostorová projekce pomocí sférického součinu dvou superrovnic $r_1$ a $r_2$

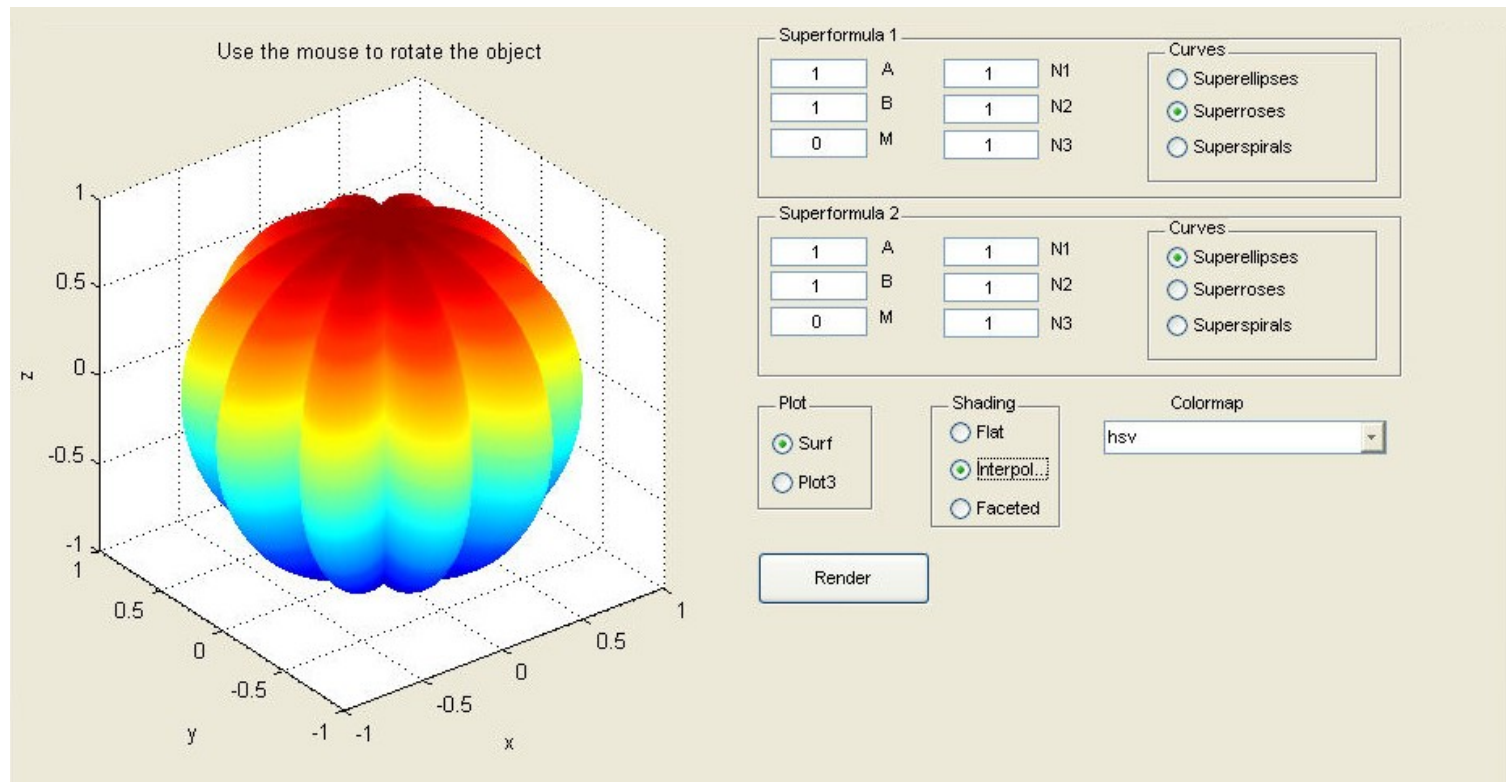
$$x = r_1(\theta) \cos \theta \cdot r_2(\varphi) \cos \varphi$$

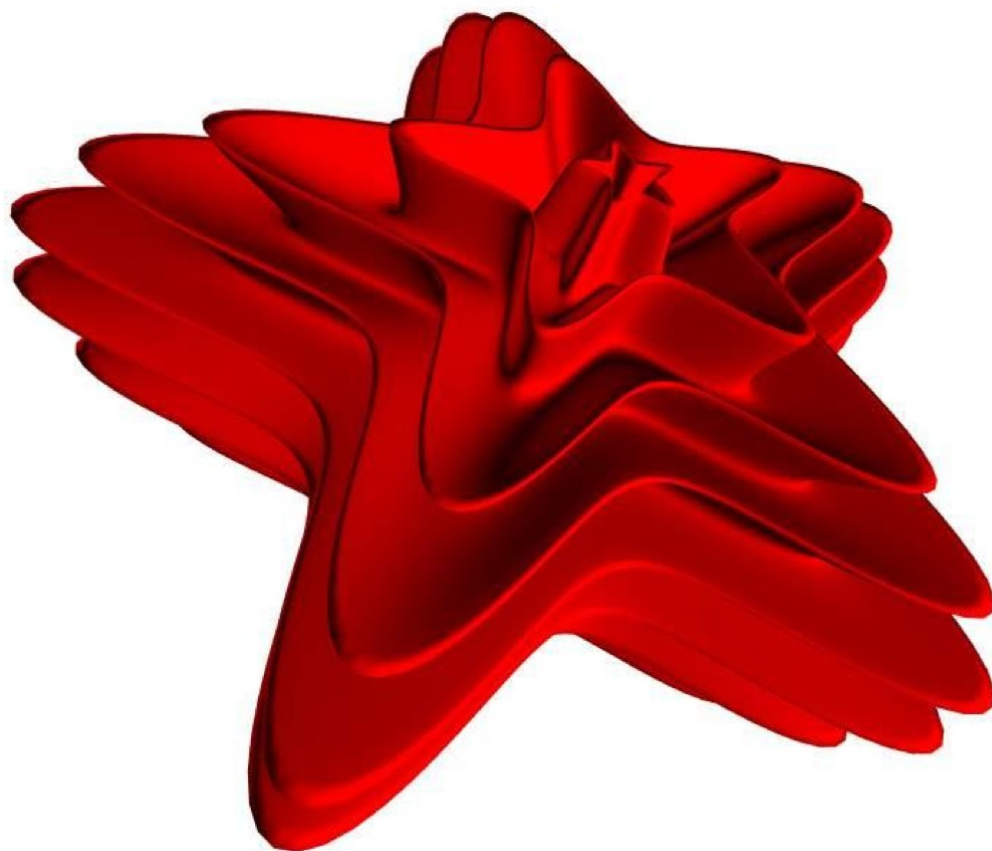
$$y = r_1(\theta) \sin \theta \cdot r_2(\varphi) \cos \varphi$$

$$z = r_2(\varphi) \sin \varphi$$

$$\theta = -\pi \dots \pi \text{ délky}$$

$$\varphi = -\pi/2 \dots \pi/2$$

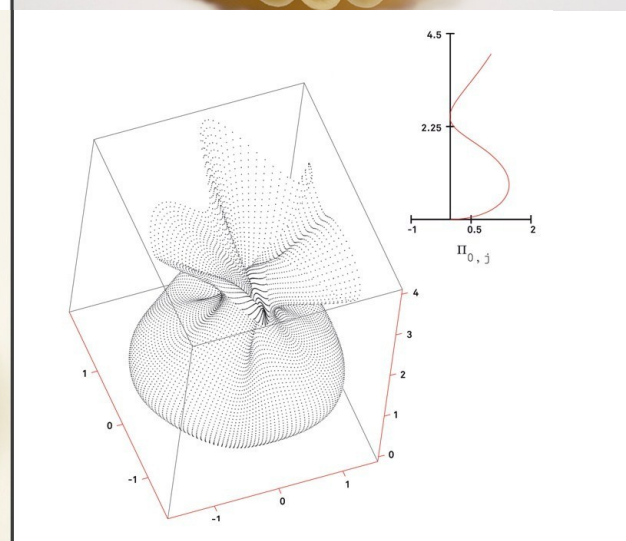
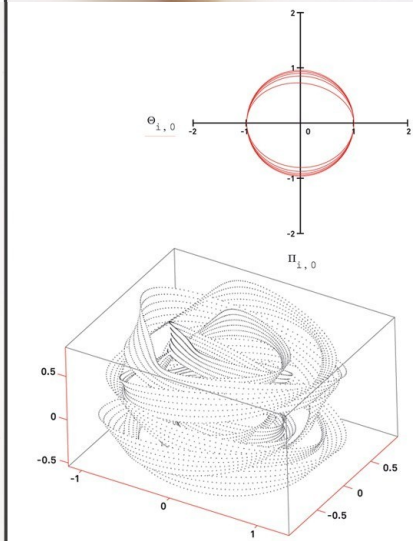
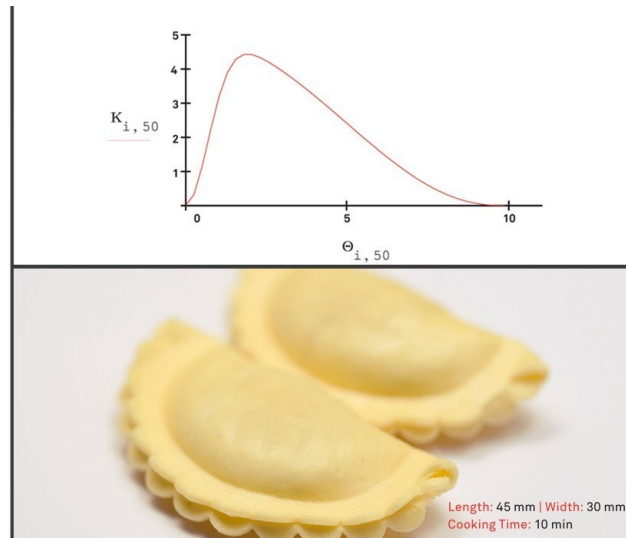
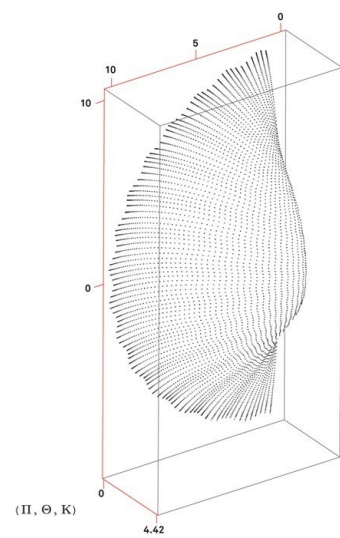
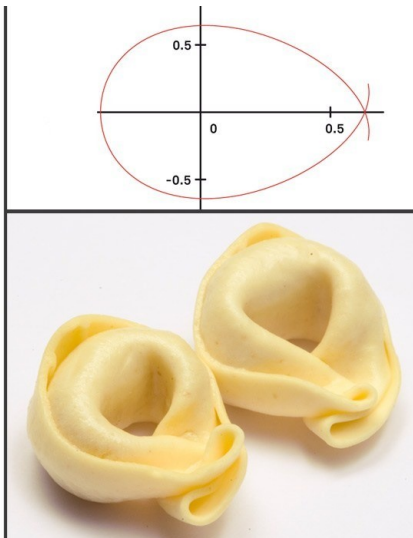
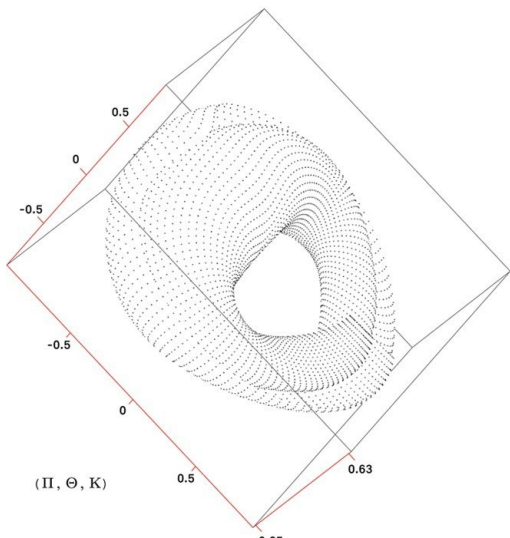




3D superovnice pro parametry  $r: (m, a, b, n_1, n_2, n_3)$

kde  $r_1: (5, 1, 1, 0.2, 6, 6)$

$r_2: (19, 1, 1, 9, 14, 11)$



George L. Legendre (2011)